

一般化確率伝播法の導入と その信号検出への応用

Introduction of Generalized Belief Propagation and its Application to Signal Detection

石橋 功至

電気通信大学 先端ワイヤレス・コミュニケーション研究センター

The University of Electro-Communications

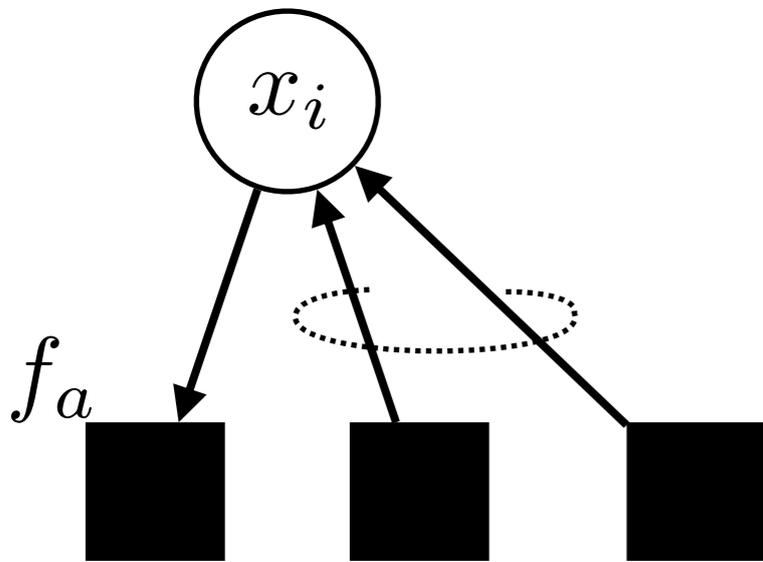
Advanced Wireless & Communication Research Center (AWCC)

本講演で紹介する内容の一部は、

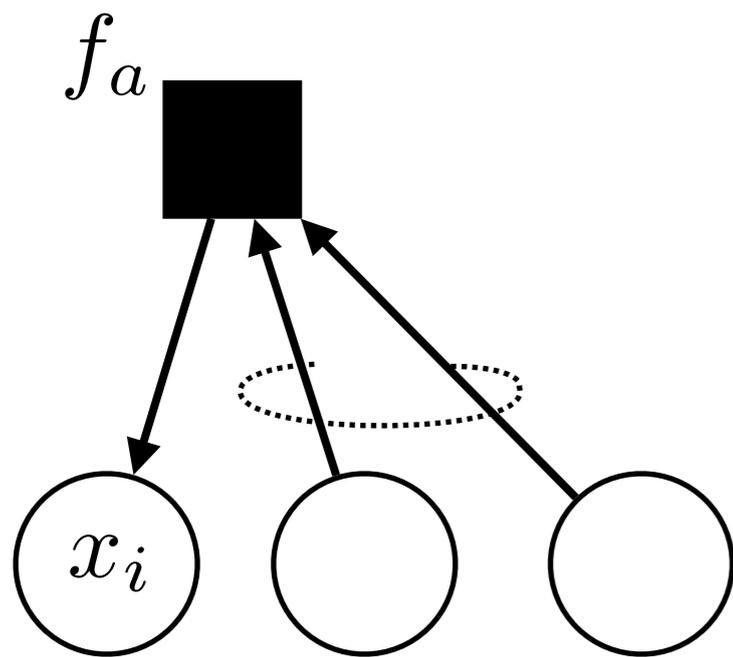
JSPS科研費15H02252 「大規模アナログ結合を有する2部グラフ理論の確立」

研究代表者：大鐘武雄先生(北大)の助成で得られたものです。

確率(信念)伝搬(伝播)法



$$n_{i \rightarrow a}(x_i) := \prod_{c \in N(i) \setminus a} m_{c \rightarrow i}(x_i)$$



$$m_{a \rightarrow i}(x_i) := \sum_{\mathbf{x}_a \setminus x_i} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j \in N(a) \setminus i} n_{j \rightarrow a}(x_j)$$

因数分解によるBPの解釈

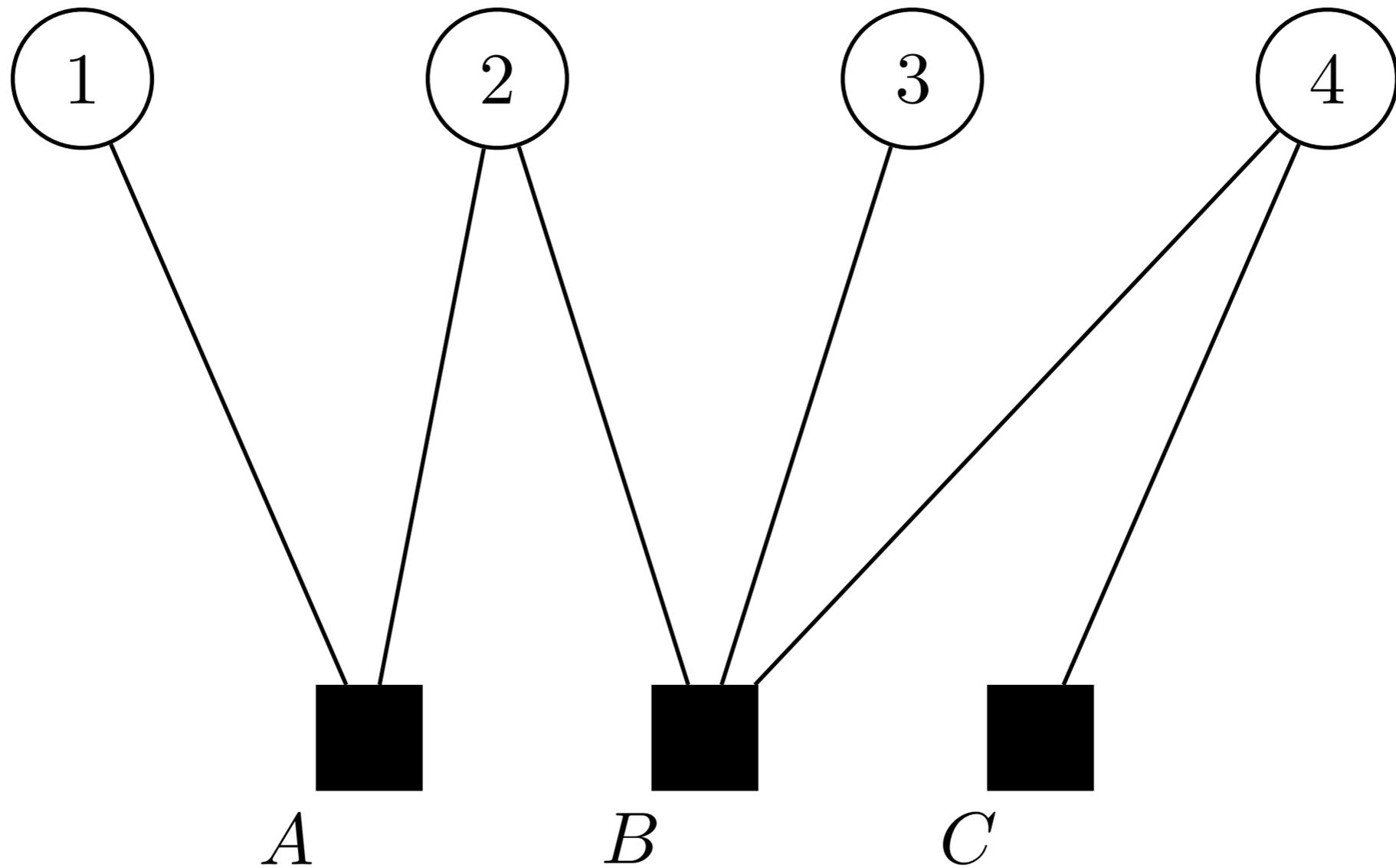
任意の4変数関数 (e.g., 結合確率質量関数) を考える

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{Z} f_A(x_1, x_2) f_B(x_2, x_3, x_4) f_C(x_4)$$

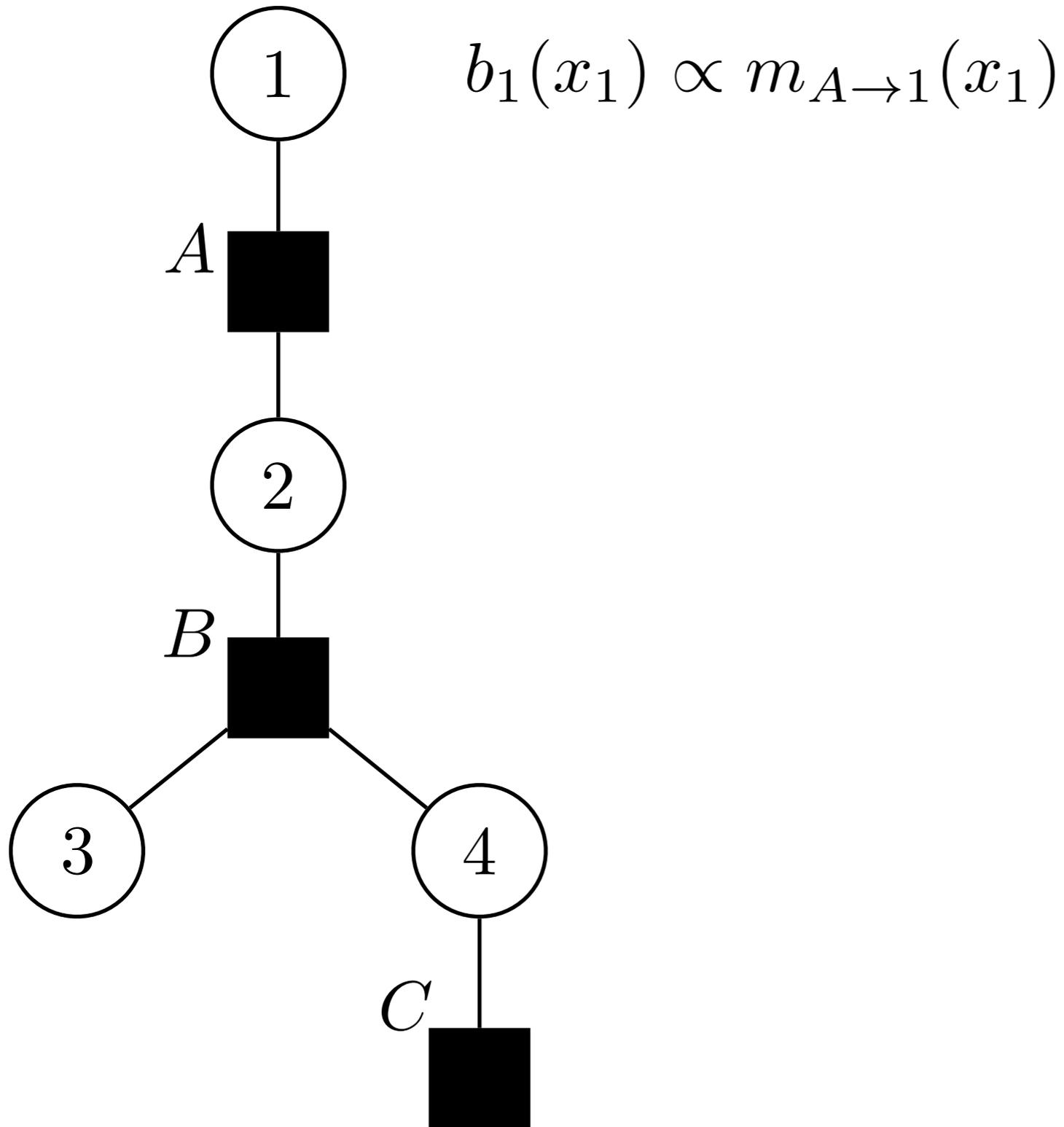
周辺化関数を求める：

$$p(x_1) = \frac{1}{Z} \sum_{x_2, x_3, x_4} f_A(x_1, x_2) f_B(x_2, x_3, x_4) f_C(x_4)$$

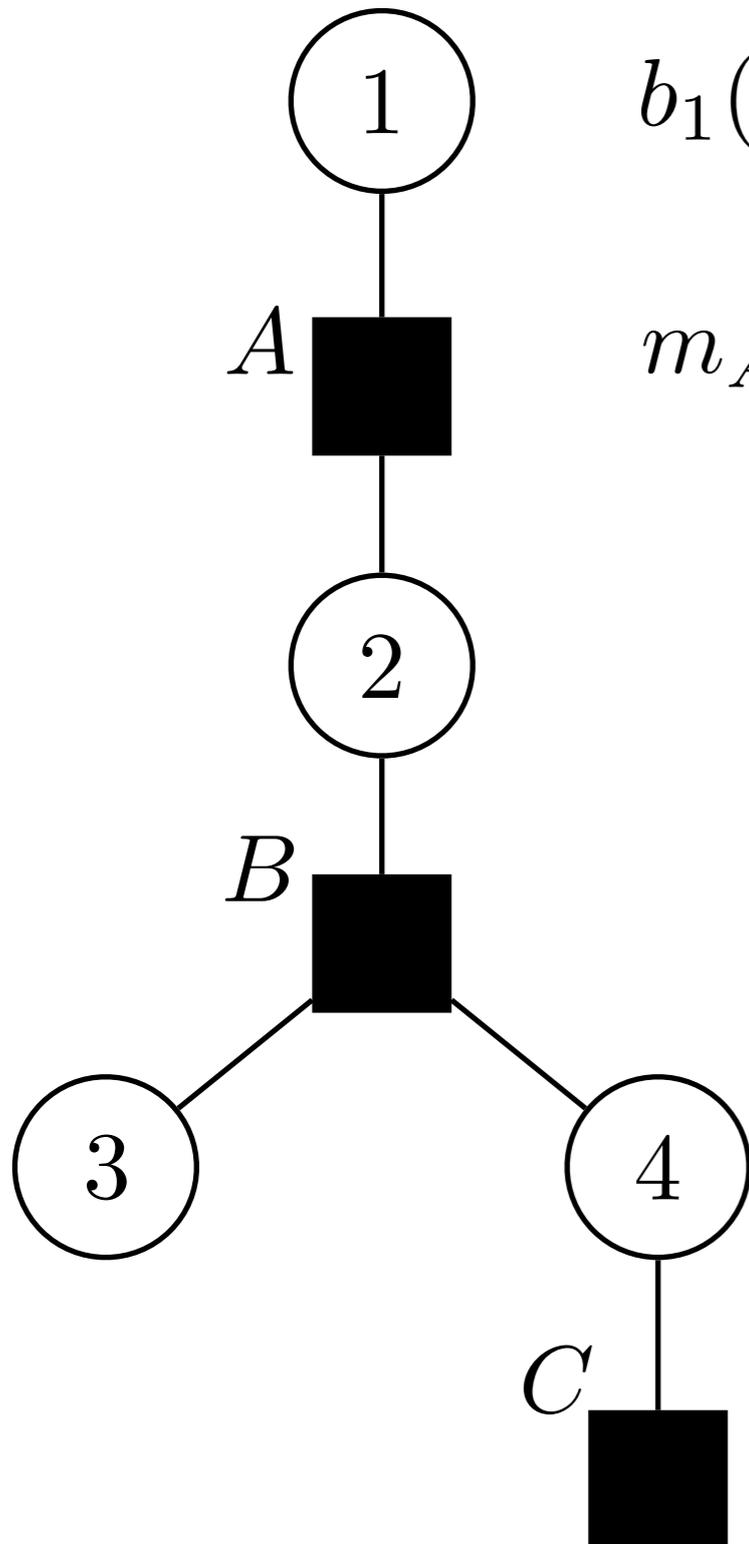
因子グラフ表現



木構造とBP



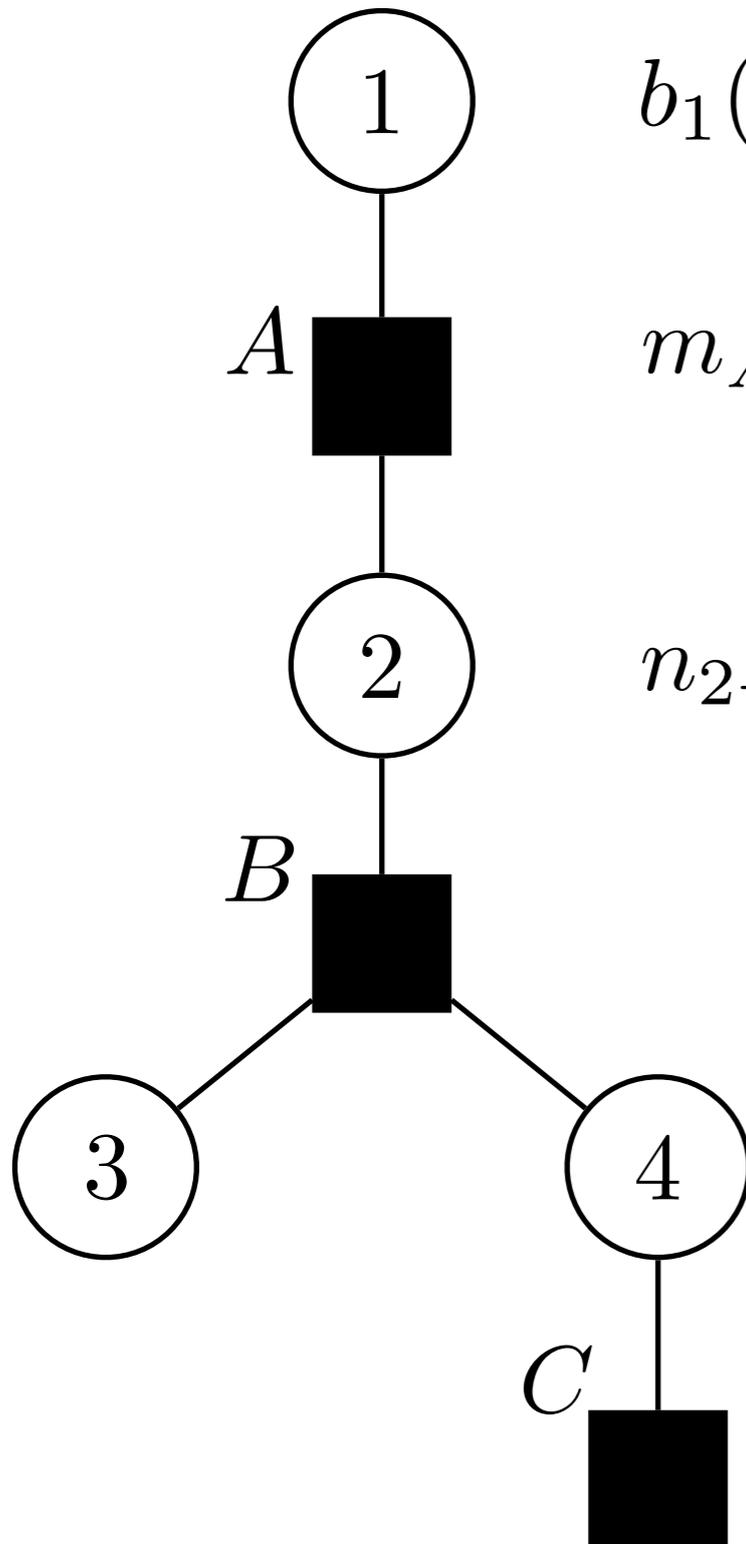
木構造とBP



$$b_1(x_1) \propto m_{A \rightarrow 1}(x_1)$$

$$m_{A \rightarrow 1}(x_1) := \sum_{x_2} f_A(x_1, x_2) n_{2 \rightarrow A}(x_2)$$

木構造とBP

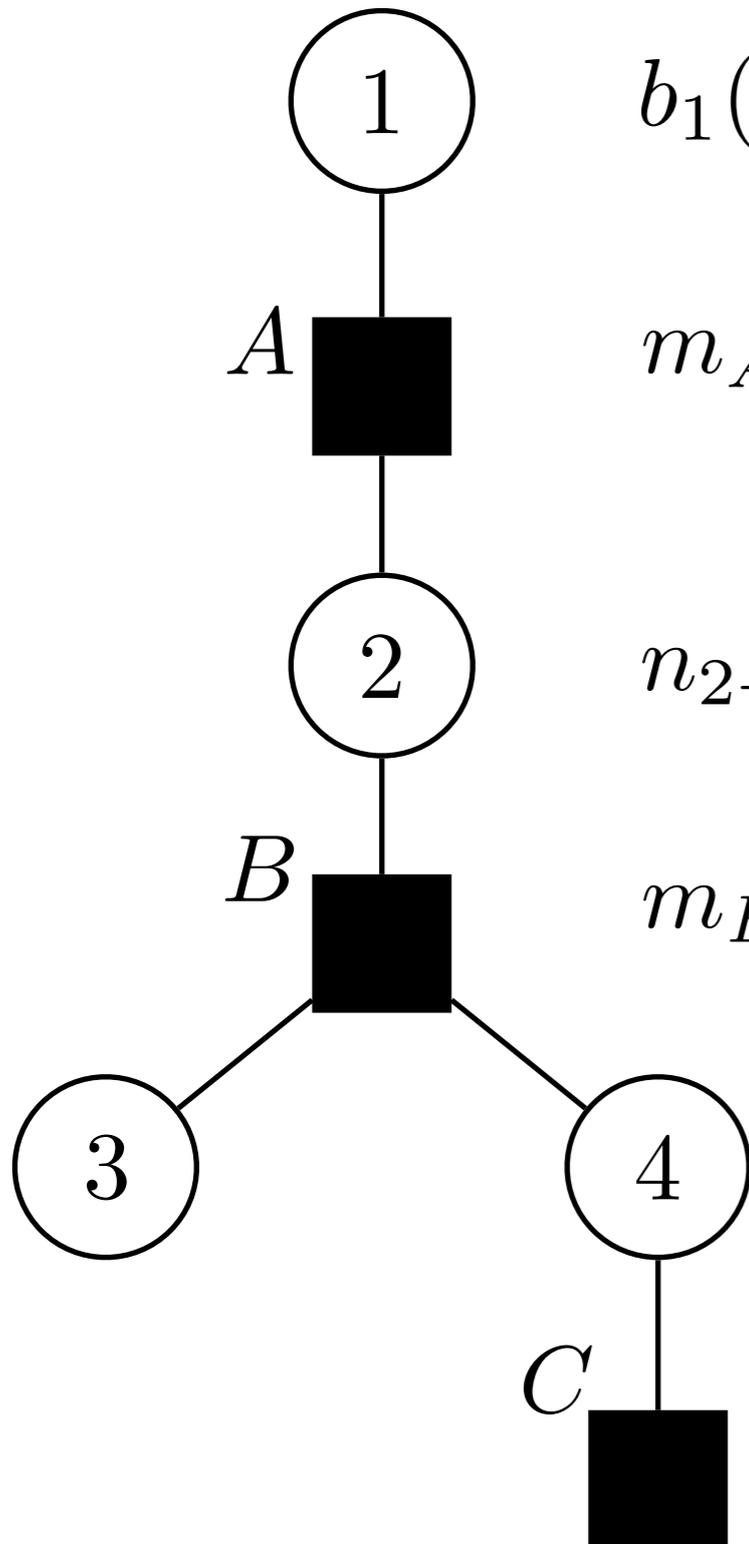


$$b_1(x_1) \propto m_{A \rightarrow 1}(x_1)$$

$$m_{A \rightarrow 1}(x_1) := \sum_{x_2} f_A(x_1, x_2) n_{2 \rightarrow A}(x_2)$$

$$n_{2 \rightarrow A}(x_2) := m_{B \rightarrow 2}$$

木構造とBP



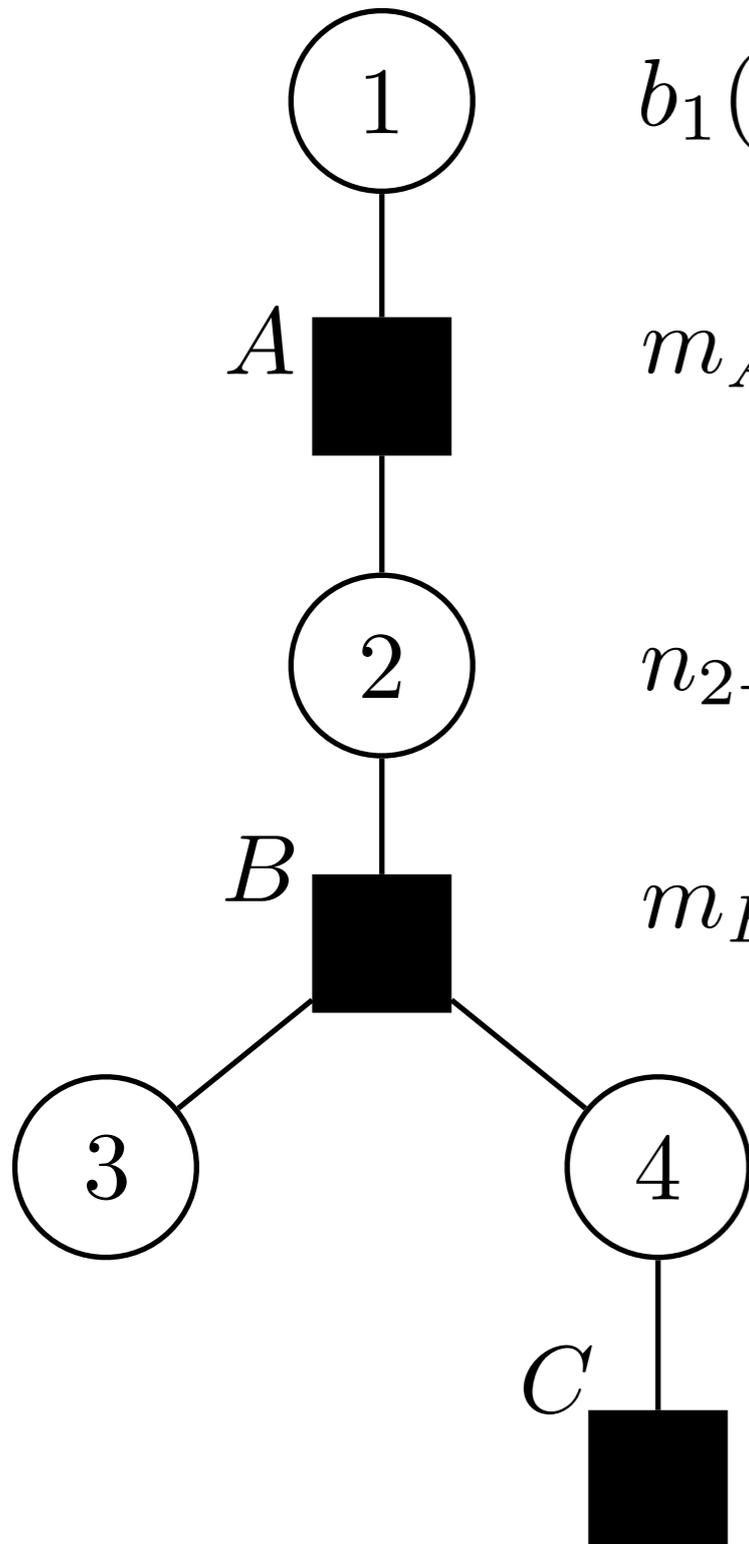
$$b_1(x_1) \propto m_{A \rightarrow 1}(x_1)$$

$$m_{A \rightarrow 1}(x_1) := \sum_{x_2} f_A(x_1, x_2) n_{2 \rightarrow A}(x_2)$$

$$n_{2 \rightarrow A}(x_2) := m_{B \rightarrow 2}$$

$$m_{B \rightarrow 2} := \sum_{x_3, x_4} f_B(x_2, x_3, x_4) n_{3 \rightarrow B} n_{4 \rightarrow B}$$

木構造とBP



$$b_1(x_1) \propto m_{A \rightarrow 1}(x_1)$$

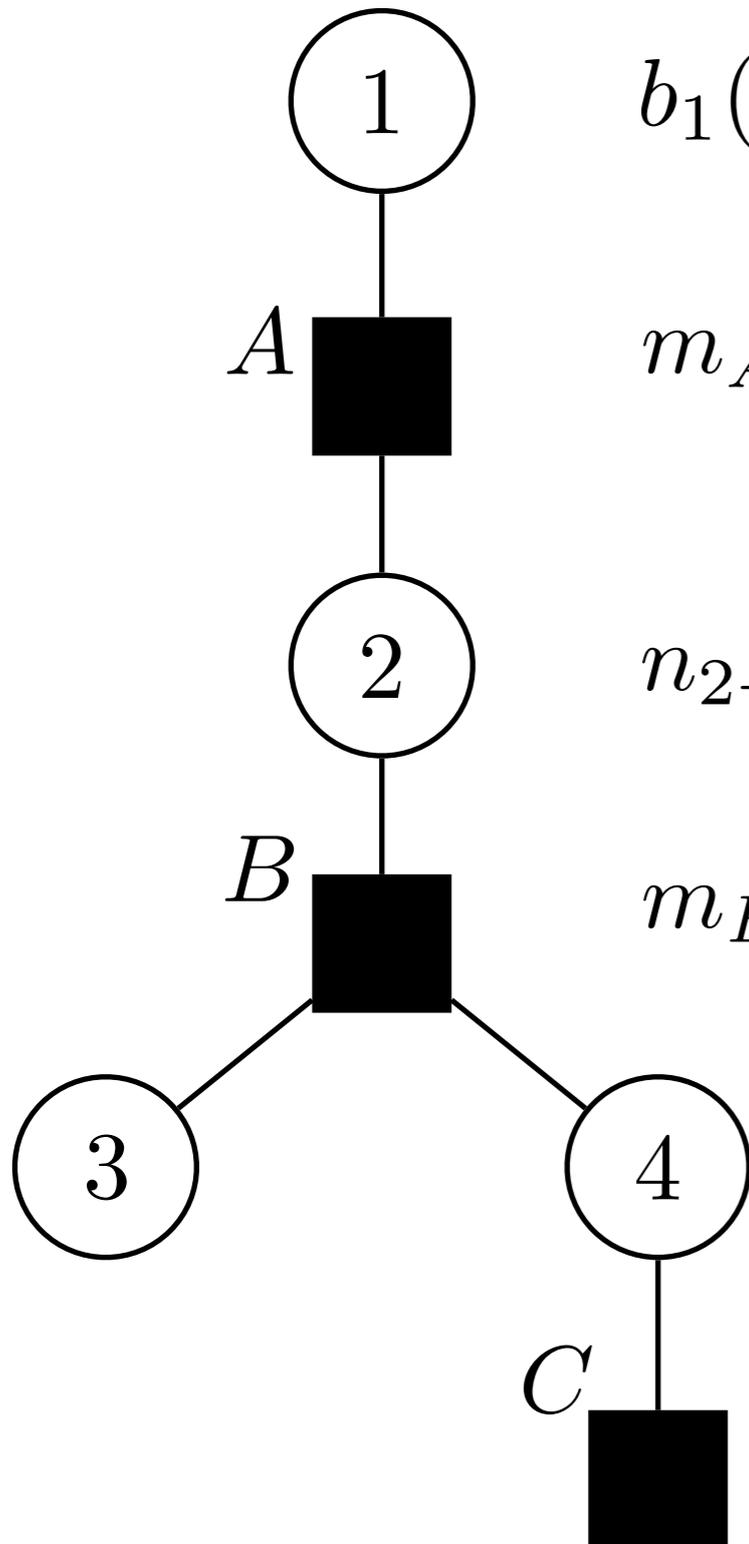
$$m_{A \rightarrow 1}(x_1) := \sum_{x_2} f_A(x_1, x_2) n_{2 \rightarrow A}(x_2)$$

$$n_{2 \rightarrow A}(x_2) := m_{B \rightarrow 2}$$

$$m_{B \rightarrow 2} := \sum_{x_3, x_4} f_B(x_2, x_3, x_4) n_{3 \rightarrow B} n_{4 \rightarrow B}$$

$$n_{4 \rightarrow B} := m_{C \rightarrow 4}$$

木構造とBP



$$b_1(x_1) \propto m_{A \rightarrow 1}(x_1)$$

$$m_{A \rightarrow 1}(x_1) := \sum_{x_2} f_A(x_1, x_2) n_{2 \rightarrow A}(x_2)$$

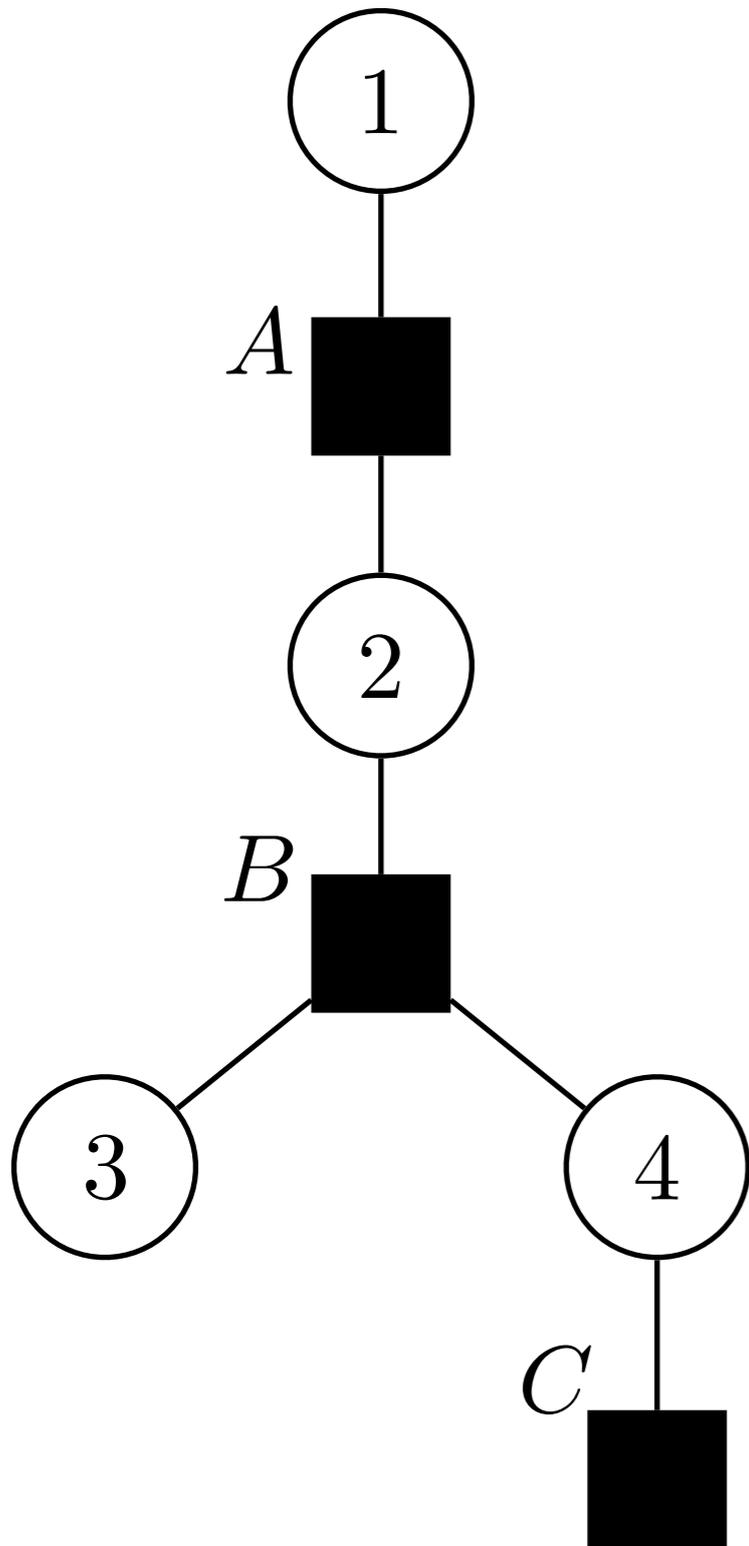
$$n_{2 \rightarrow A}(x_2) := m_{B \rightarrow 2}$$

$$m_{B \rightarrow 2} := \sum_{x_3, x_4} f_B(x_2, x_3, x_4) n_{3 \rightarrow B} n_{4 \rightarrow B}$$

$$n_{4 \rightarrow B} := m_{C \rightarrow 4}$$

$$m_{C \rightarrow 4} := f_C(x_4)$$

木構造とBP



$$b_1(x_1) \propto$$

$$\sum_{x_2, x_3, x_4} f_A(x_1, x_2, x_3) f_B(x_2, x_3, x_4) f_C(x_4)$$



$$p(x_1) =$$

$$\frac{1}{Z} \sum_{x_2, x_3, x_4} f_A(x_1, x_2, x_3) f_B(x_2, x_3, x_4) f_C(x_4)$$

ループのあるグラフとBP

- ・ ループのあるグラフ上におけるBPは「因数分解」による解釈ができない
- ・ 一方で、ループがあるにもかかわらずBPは機能し、十分な精度で正しい解に収束する
 - ・ e.g., LDPC符号の復号、信号復調（本日の講演内容）など
- ・ 確率伝播法(BP: Belief Propagation)を異なる解釈で理解できないか？
- ・ 自由エネルギーの導入 [Yedidia, IT2007]

定義

ある確率質量関数 $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ が以下のように書けるとする：

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \prod_{a \in \mathcal{A}} f_a(\mathbf{x}_a)$$

因子ノードのインデックス集合

ここで、

$$\mathbf{x}_a \triangleq (x_i \mid i \in \mathcal{N}(a))^T$$

インデックス a に隣接する
インデックスの集合

領域の導入

領域 (region) を以下のように定義する：

$$R \triangleq (\mathcal{I}_R, \mathcal{A}_R)$$

ここで、

$$\mathcal{I}_R \subseteq \underline{\mathcal{I}}$$

情報ノードのインデックス集合

$$\mathcal{A}_R \subseteq \underline{\mathcal{A}}$$

因子ノードのインデックス集合

ただし、 $a \in \mathcal{A}_R$ は以下の条件を満たす。

$$\underline{\mathcal{N}(a)} \subseteq \mathcal{I}_R$$

インデックス a に隣接する
インデックスの集合

数え上げ数条件

各領域は、対応する「数え上げ数 (Counting Number)」を持つ。

$$c_R \in \mathbb{Z}$$

領域の集合 $\mathcal{R} \triangleq \{(R, c_R)\}$ が以下の式を満たすとき、その領域分割は 有効である (Valid) と呼ばれる。

$$\sum_{(R, c_R) \in \mathcal{R}} c_R I_{\mathcal{A}_R}(a) = \sum_{(R, c_R) \in \mathcal{R}} c_R I_{\mathcal{I}_R}(i) = 1$$

指示関数

変分自由エネルギー

真の分布 $p_{\mathbf{x}}$ を近似する関数 b に対し、以下の変分自由エネルギー (Variational Free Energy) を定義する：

$$\begin{aligned}
 F(b) &\triangleq \sum_{\mathbf{x}} b(\mathbf{x}) \ln \frac{b(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})} \\
 &= \underbrace{\sum_{\mathbf{x}} b(\mathbf{x}) \ln b(\mathbf{x})}_{-H(b)} - \underbrace{\sum_{\mathbf{x}} b(\mathbf{x}) \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}_{-U(b)} \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 &\quad \text{エントロピー} \qquad \qquad \text{平均エネルギー}
 \end{aligned}$$

変分自由エネルギー

真の分布 $p_{\mathbf{x}}$ を近似する関数 b に対し、以下の変分自由エネルギー (Variational Free Energy) を定義する：

$$\begin{aligned}
 F(b) &\triangleq \sum_{\mathbf{x}} b(\mathbf{x}) \ln \frac{b(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})} \\
 &= \underbrace{\sum_{\mathbf{x}} b(\mathbf{x}) \ln b(\mathbf{x})}_{-H(b)} - \underbrace{\sum_{\mathbf{x}} b(\mathbf{x}) \ln p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}_{-U(b)} \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 &\quad \text{エントロピー} \qquad \qquad \text{平均エネルギー}
 \end{aligned}$$



カルバックライブラ情報量 $D(b \parallel p_{\mathbf{x}})$

領域自由エネルギー近似

領域とそれに対応する数え上げ数を用いて、変分自由エネルギーを近似する領域自由エネルギー (Region Free Energy) を導入する：

$$F_{\mathcal{R}} \triangleq U_{\mathcal{R}} - H_{\mathcal{R}}$$

ここで、

$$U_{\mathcal{R}} \triangleq - \sum_{(R, c_R) \in \mathcal{R}} c_R \sum_{a \in \mathcal{A}_R} \sum_{\mathbf{x}_R} b_R(\mathbf{x}_R) \ln f_a(\mathbf{x}_a)$$

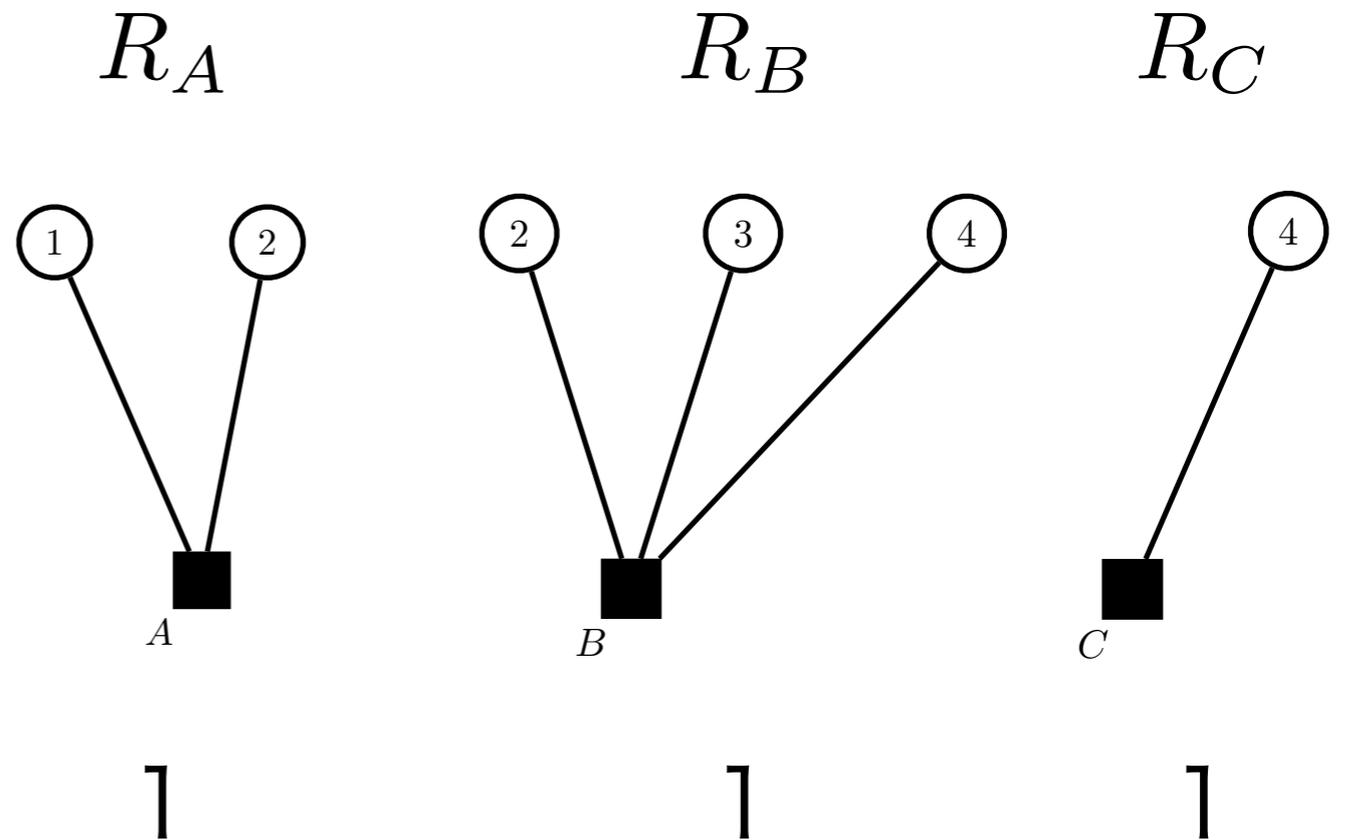
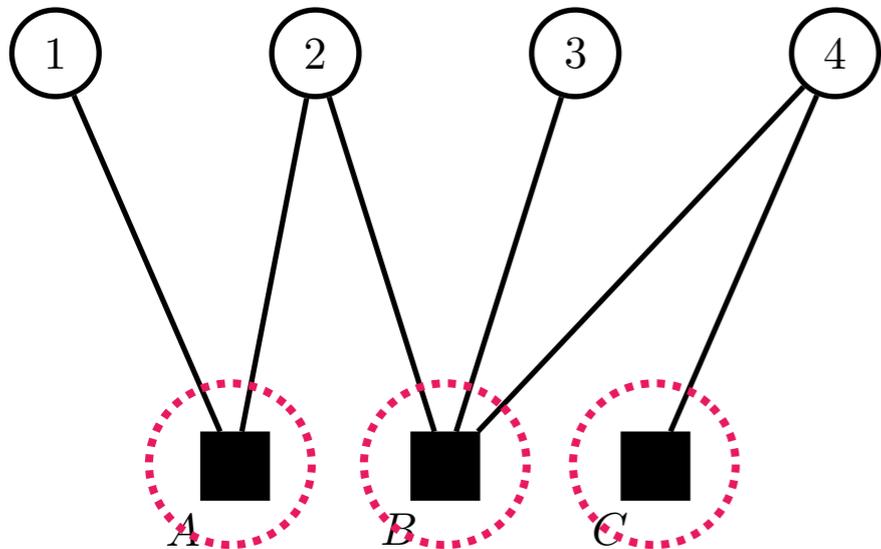
$$H_{\mathcal{R}} \triangleq - \sum_{(R, c_R) \in \mathcal{R}} c_R \sum_{\mathbf{x}_R} b_R(\mathbf{x}_R) \ln b_R(\mathbf{x}_R)$$

ベータ法

大領域：全ての $a \in \mathcal{A}$

$$R_a \triangleq (\mathcal{N}(a), \{a\})$$

$$c_R = 1$$

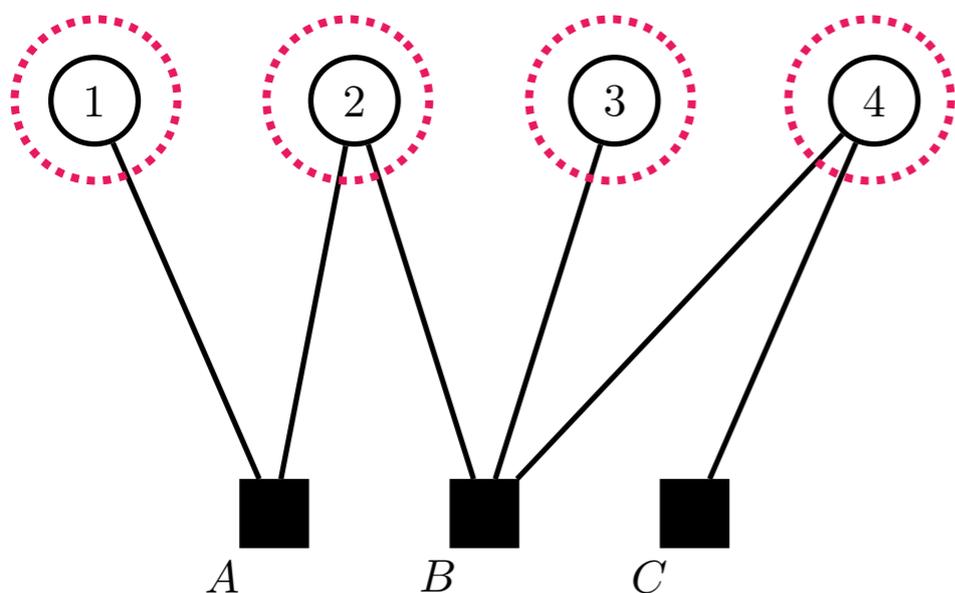


ベータ法

小領域：全ての $i \in \mathcal{I}$

$$R_i \triangleq (\{i\}, \emptyset)$$

$$c_{R_i} = 1 - |\mathcal{N}(i)|$$



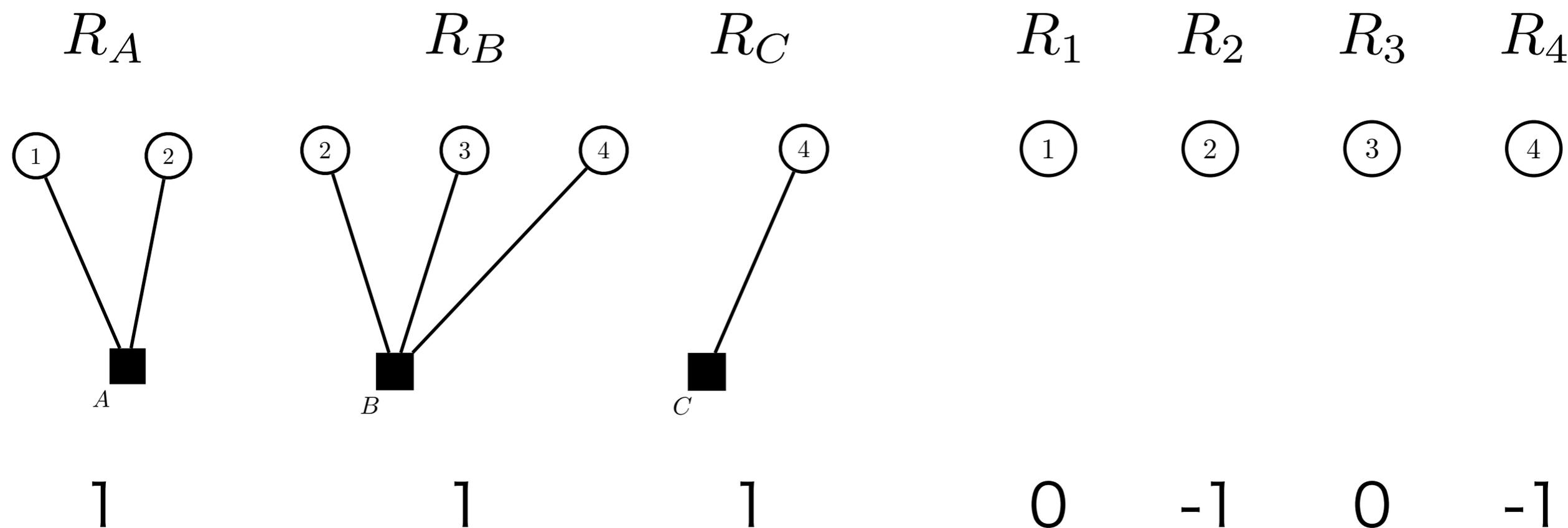
R_1	R_2	R_3	R_4
①	②	③	④
0	-1	0	-1

ベータ近似

領域集合：

$$\mathcal{R}_{\text{BP}} \triangleq \{(R_i, c_{R_i}) \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{(R_a, c_{R_a}) \mid a \in \mathcal{A}\}$$

この領域集合に対する領域自由エネルギーを特に**ベータ自由エネルギー (Bethe Free Energy)** と呼ぶ。



ベータ近似とBP

$$\begin{aligned}
 F_{\mathcal{R}_{\text{BP}}} &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{\mathbf{x}_a} b_{R_a}(\mathbf{x}_a) \ln \frac{b_{R_a}(\mathbf{x}_a)}{f_a(\mathbf{x}_a)} \\
 &\quad - \sum_{i \in \mathcal{I}} (|\mathcal{N}(i)| - 1) \sum_{x_i} b_{R_i}(x_i) \ln b_{R_i}(x_i)
 \end{aligned}$$

信念の正規化制約と周辺化制約を考慮した、制約付き最小化問題と捉え直す。ゆえにラグランジュ関数を用いて、

$$\begin{aligned}
 L_{\text{BP}} \triangleq & F_{\mathcal{R}_{\text{BP}}} - \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{N}(a)} \sum_{x_i} \lambda_{a,i}(x_i) \left(\underbrace{b_i(x_i) - \sum_{\mathbf{x}_a \setminus x_i} b_a(\mathbf{x}_a)}_{\text{周辺化制約 (=0)}} \right) \\
 & - \sum_{a \in \mathcal{A}} \gamma_a \left(\underbrace{\sum_{\mathbf{x}_a} b_a(\mathbf{x}_a) - 1}_{\text{正規化制約 (=0)}} \right)
 \end{aligned}$$

停留点

ラグランジュ関数 L_{BP} の停留点はBPの不動点 (fixed point) と一致し、次式を満たす：

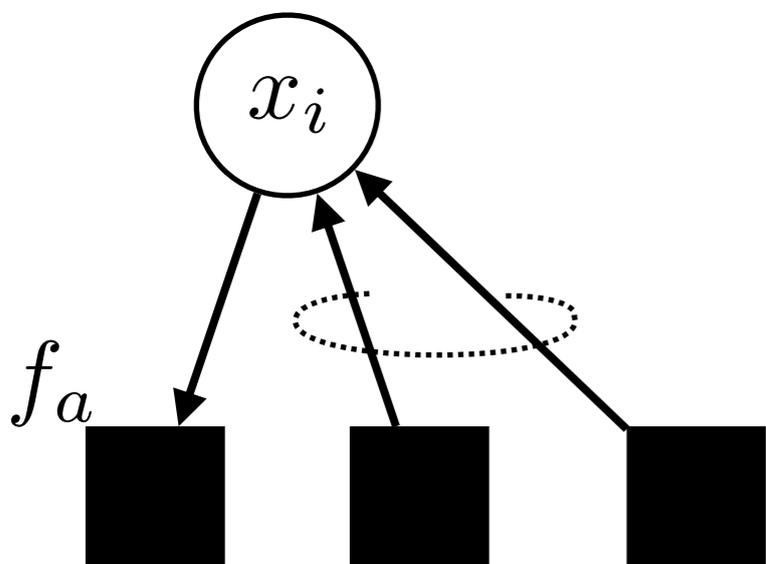
$$b_a(\mathbf{x}_a) = z_a f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{i \in \mathcal{N}(a)} n_{i \rightarrow a}(x_i)$$

$$b_i(x_i) = \prod_{a \in \mathcal{N}(i)} m_{a \rightarrow i}(x_i)$$

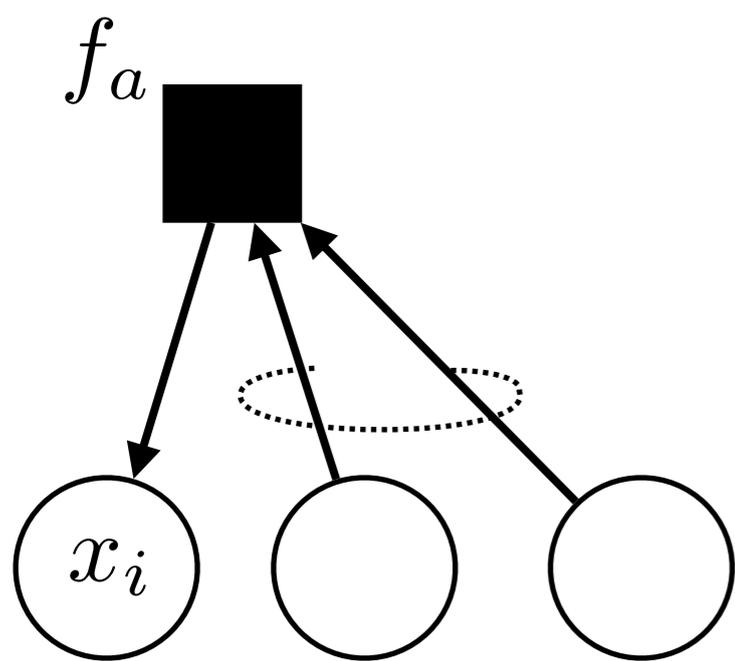
$$m_{a \rightarrow i}(x_i) := \sum_{\mathbf{x}_a \setminus x_i} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j \in \mathcal{N}(a) \setminus i} n_{j \rightarrow a}(x_j)$$

$$n_{i \rightarrow a}(x_i) := \prod_{c \in \mathcal{N}(i) \setminus a} m_{c \rightarrow i}(x_i)$$

再揭：BP法



$$n_{i \rightarrow a}(x_i) := \prod_{c \in N(i) \setminus a} m_{c \rightarrow i}(x_i)$$

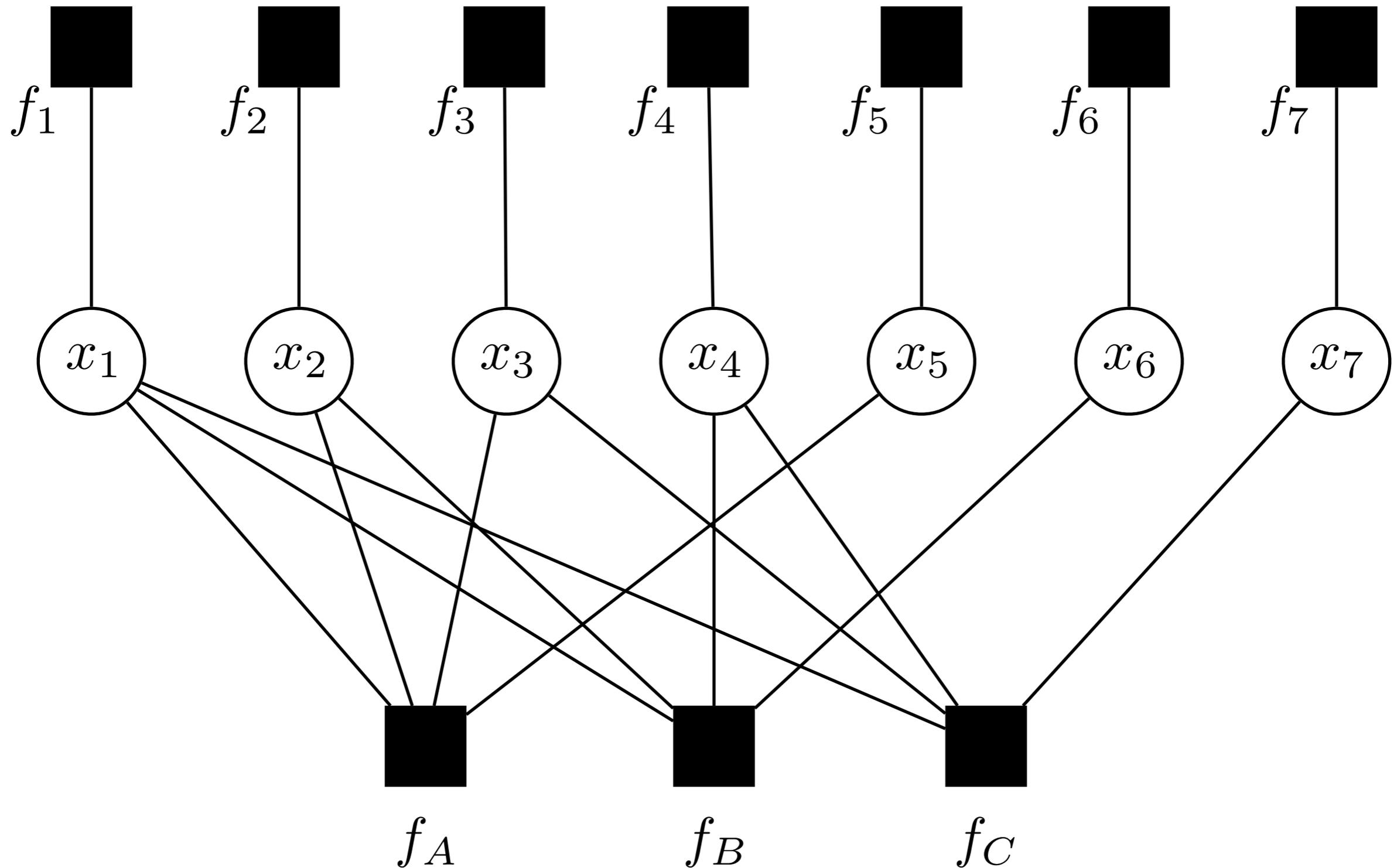


$$m_{a \rightarrow i}(x_i) := \sum_{\mathbf{x}_a \setminus x_i} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j \in N(a) \setminus i} n_{j \rightarrow a}(x_j)$$

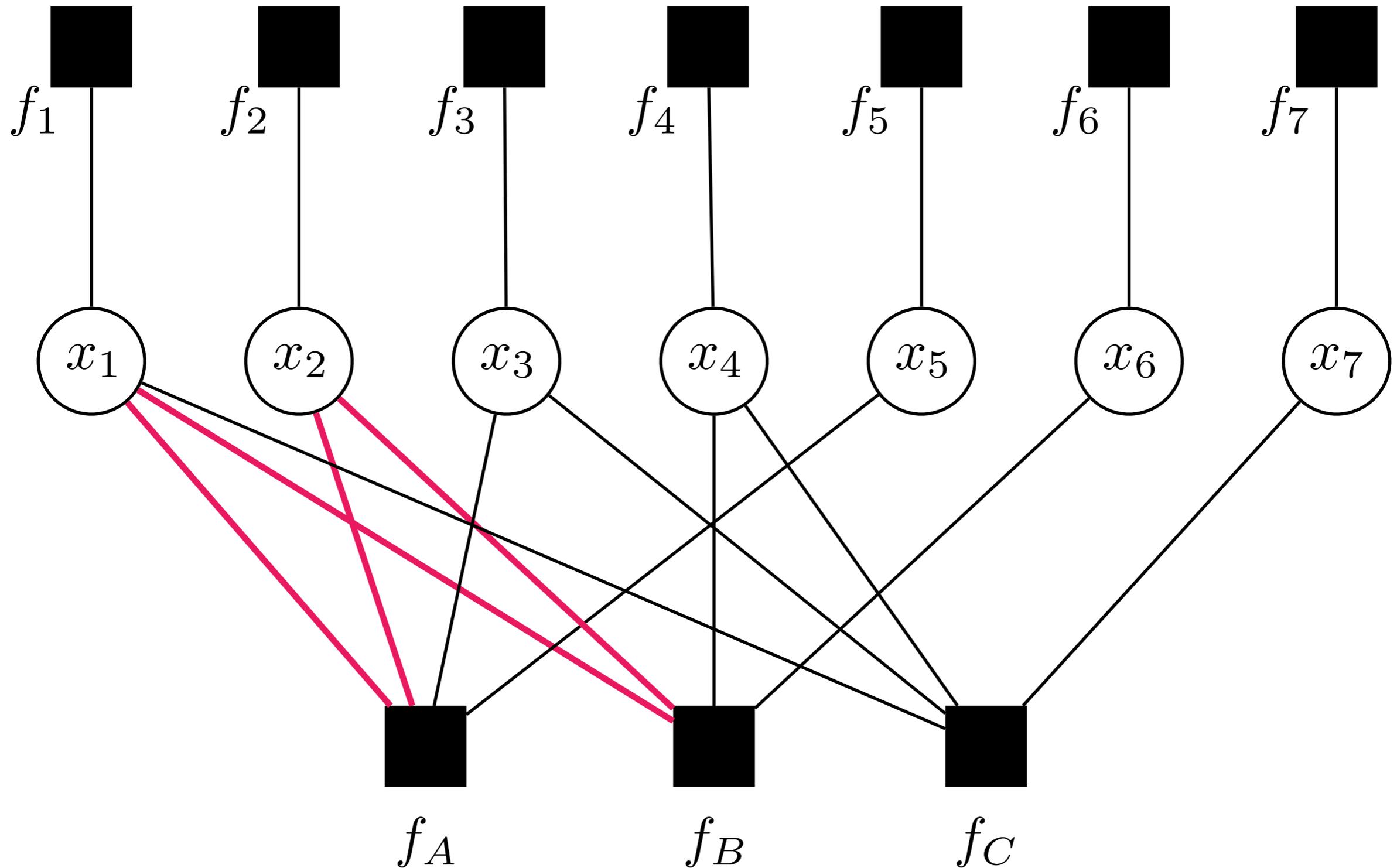
クラスター変分法

- ・ ベーテ近似によってBP法と同一の更新式が導かれる
- ・ グラフがサイクルを持たない場合、ベーテ自由エネルギーは変分自由エネルギーに一致する
 - ・ 因数分解による解釈と同一の結果
- ・ グラフがサイクルを持つ場合、ベーテ自由エネルギーは極小はただ一つとは限らず、収束が保証されない
 - ・ 制振 (Damping) を用いる理由
- ・ より広い相互の関係性を考慮した領域を定義することで、近似精度が改善されるのでは？
 - ・ クラスター変分法 [菊池、1951] → **領域グラフ**

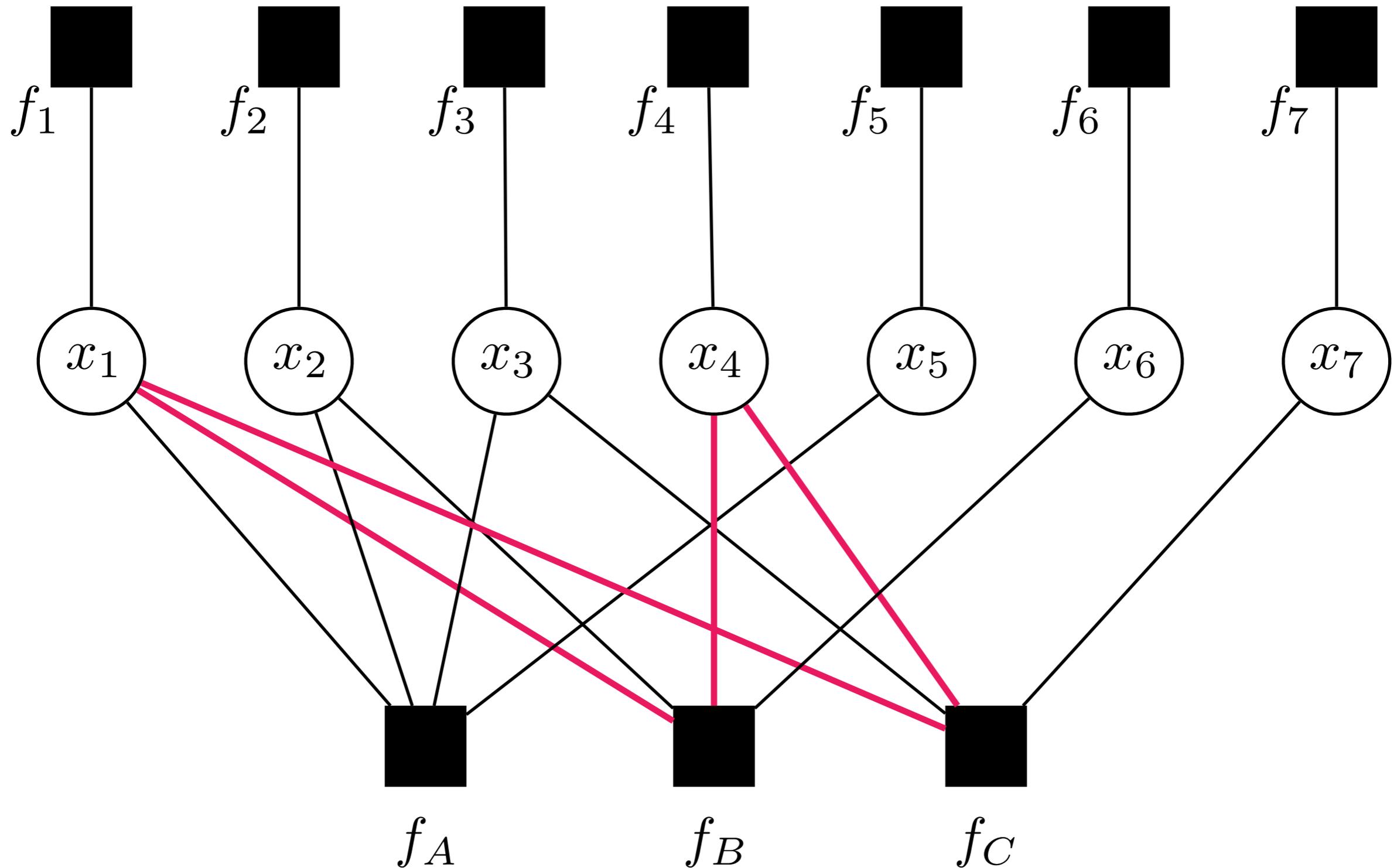
ループのある因子グラフ



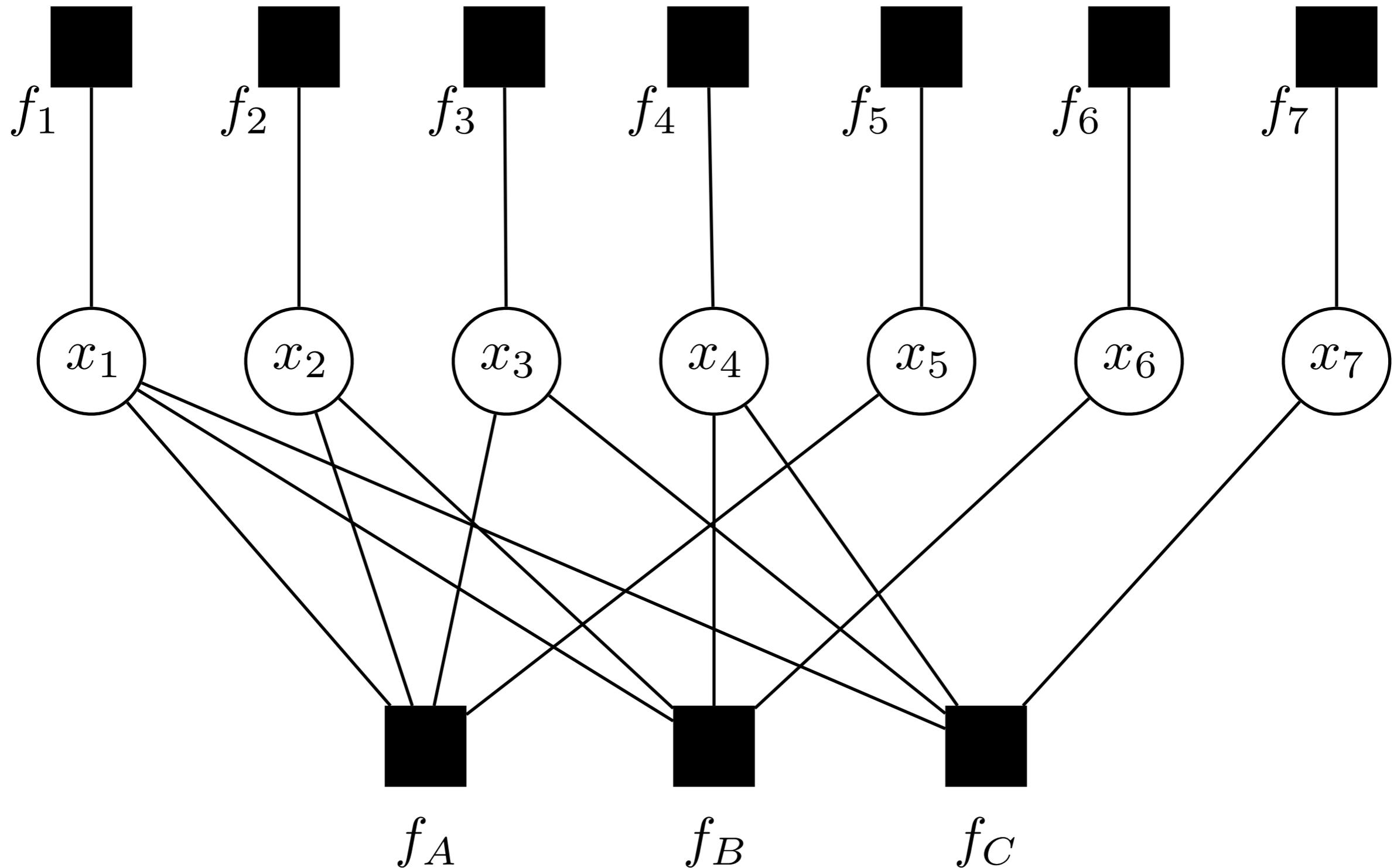
ループのある因子グラフ



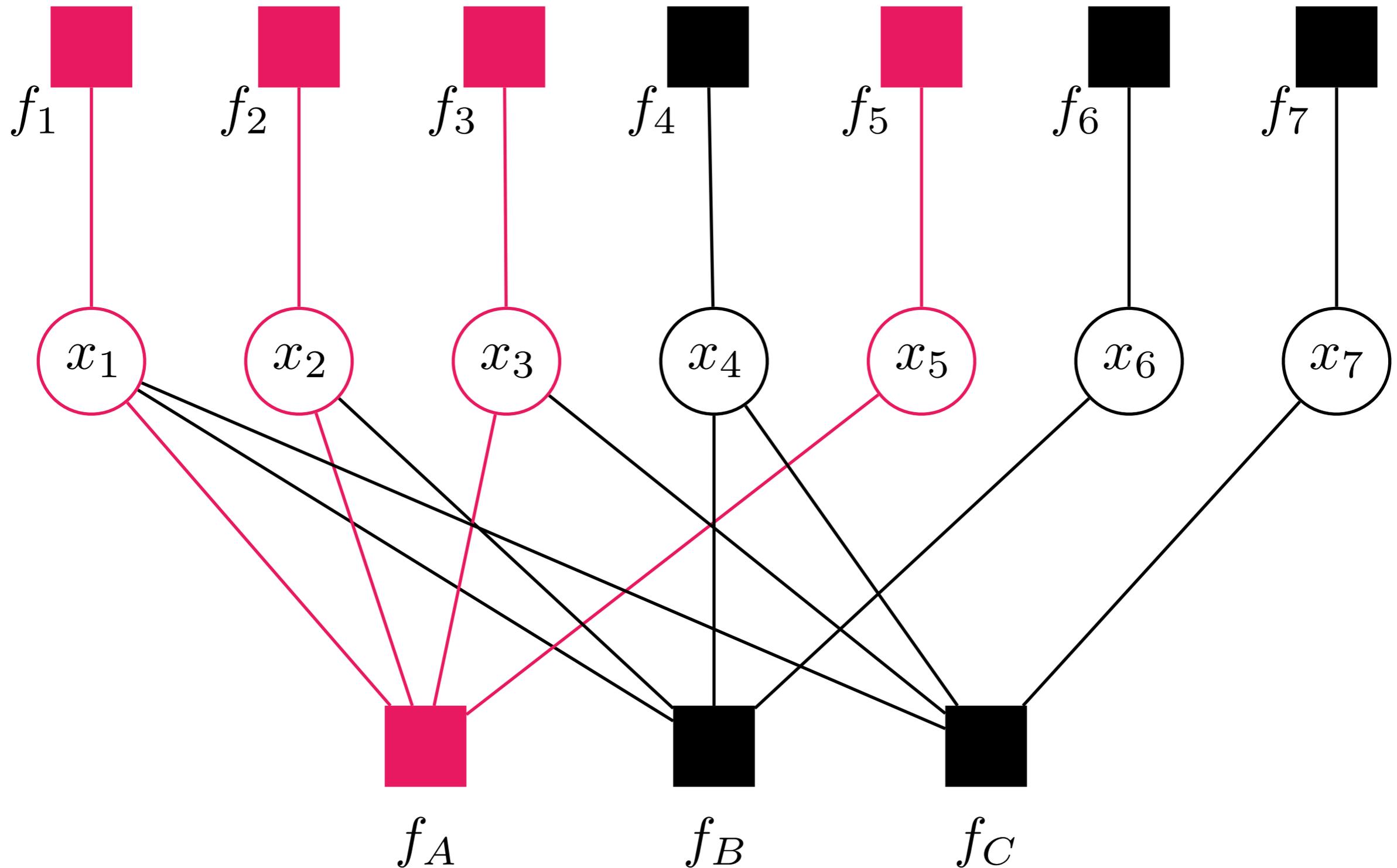
ループのある因子グラフ



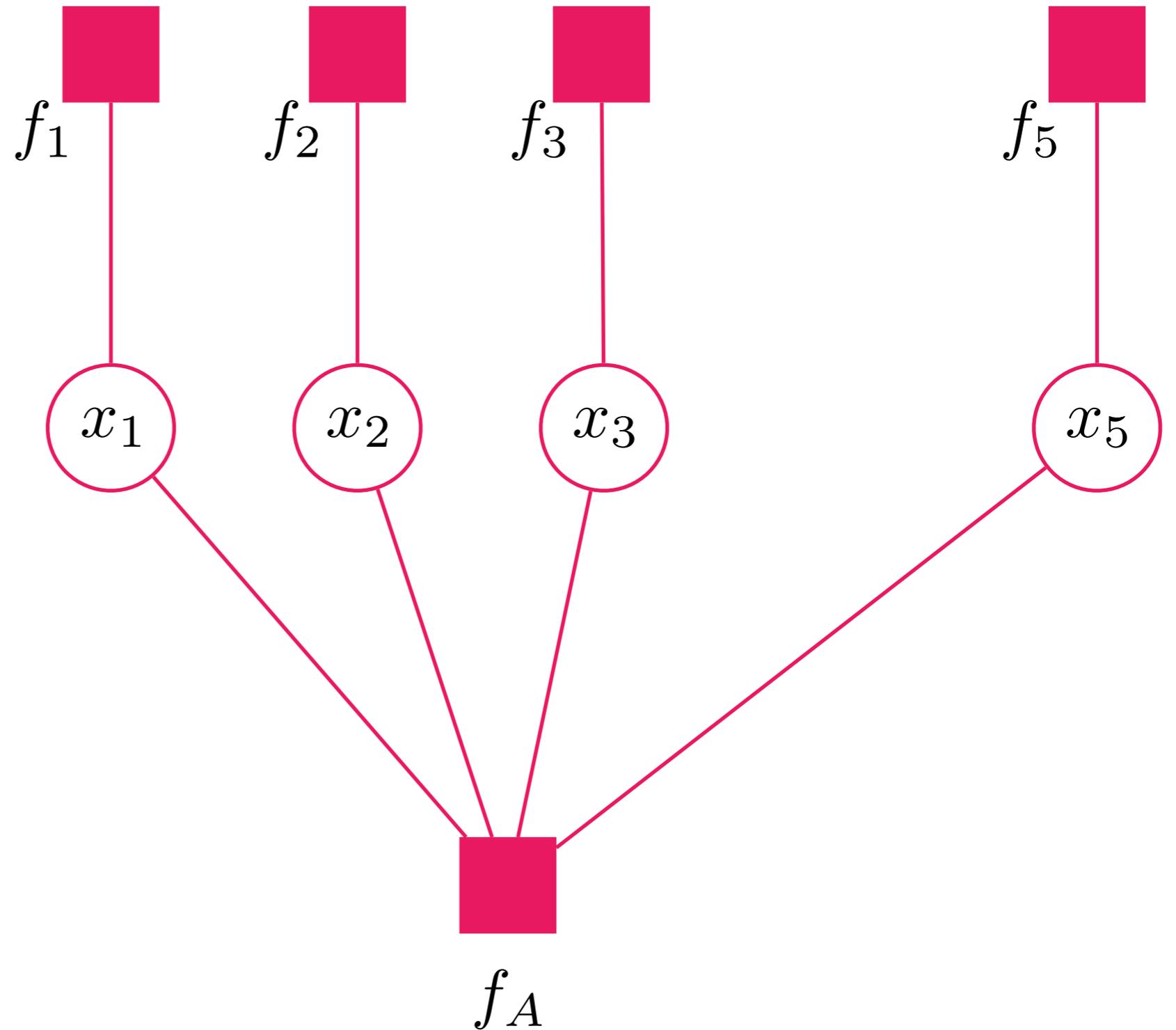
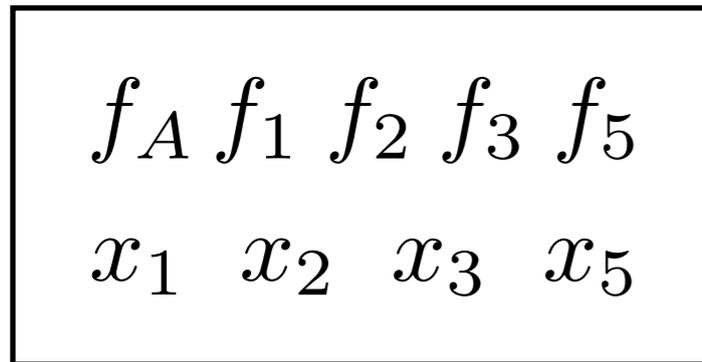
領域グラフ



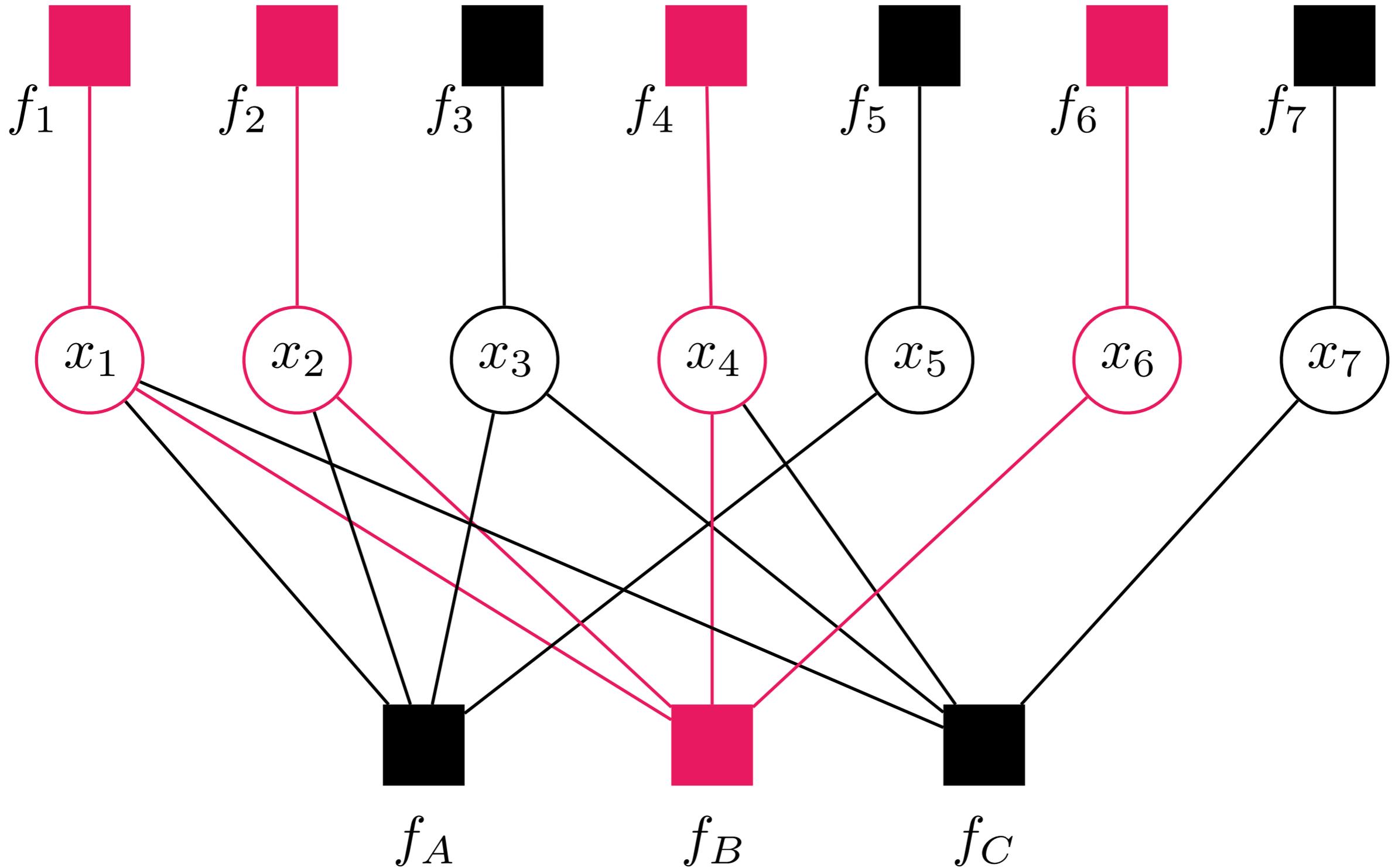
領域グラフ



領域グラフ



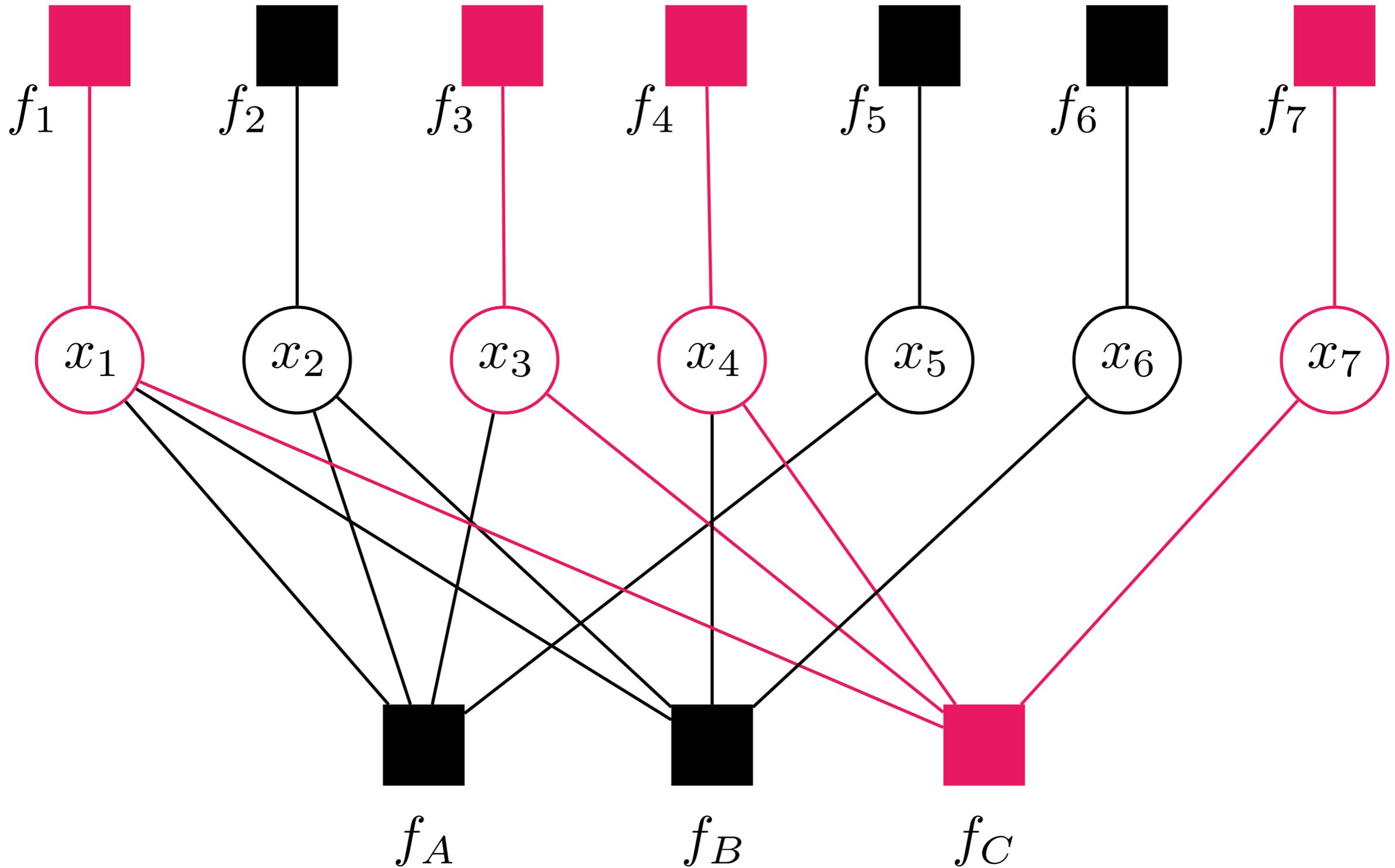
領域グラフ



領域グラフ

 $f_A \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_5$ $x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_5$ $f_B \ f_1 \ f_2 \ f_4 \ f_6$ $x_1 \ x_2 \ x_4 \ x_6$

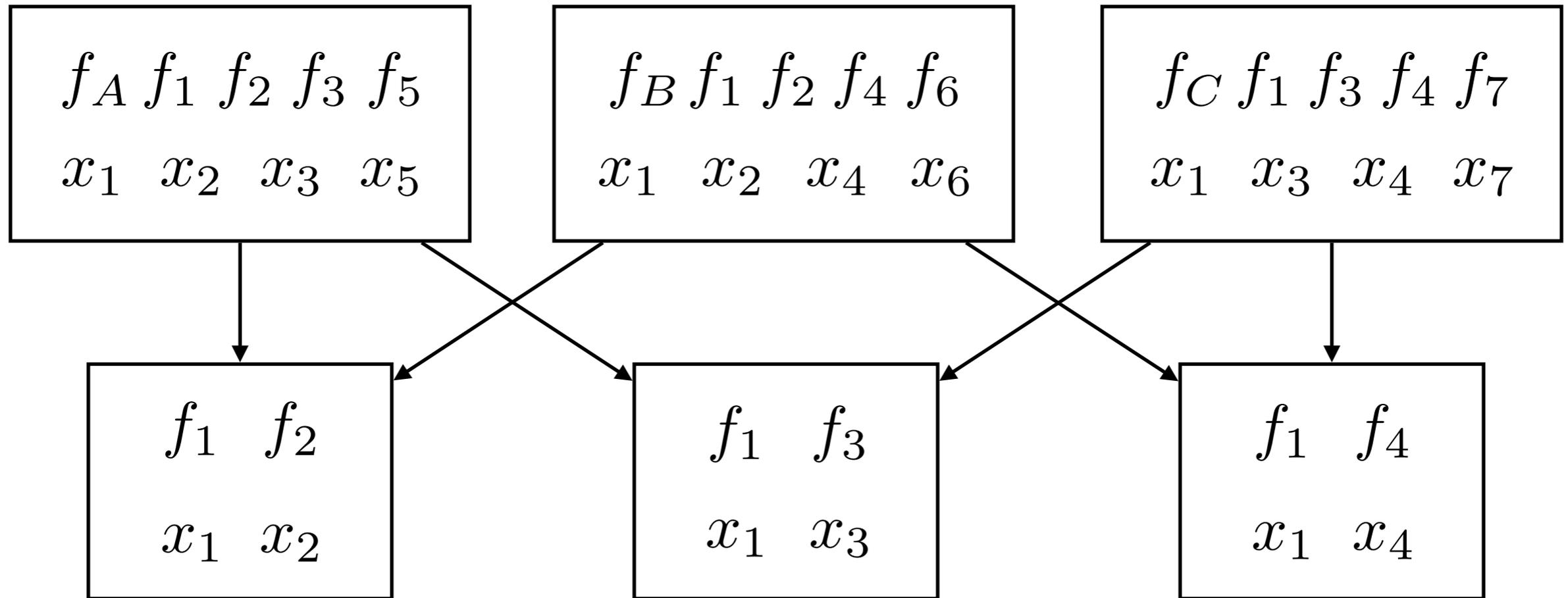
領域グラフ



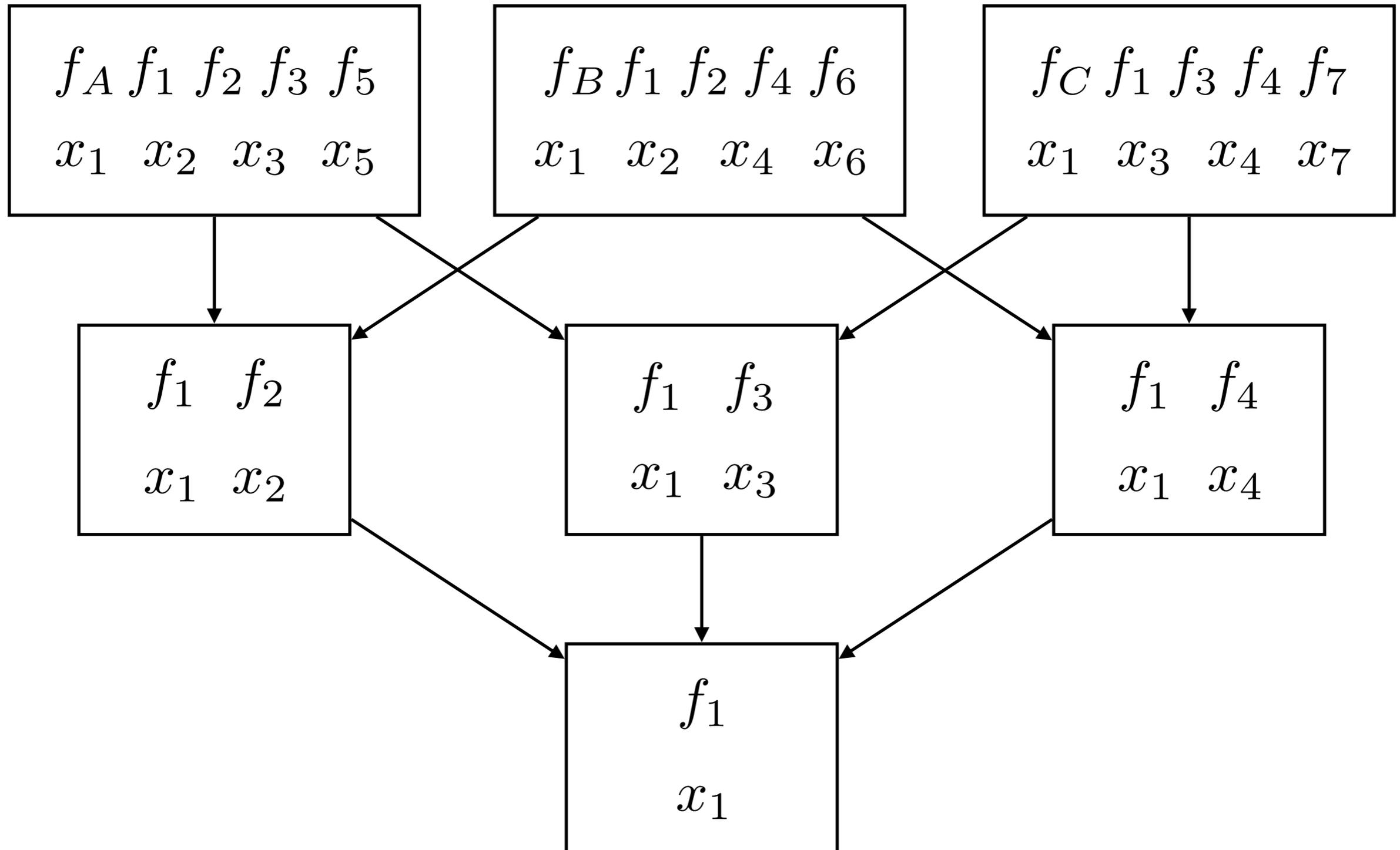
領域グラフ

$$\begin{array}{cccc} f_A & f_1 & f_2 & f_3 & f_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} f_B & f_1 & f_2 & f_4 & f_6 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_6 & \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} f_C & f_1 & f_3 & f_4 & f_7 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_7 & \end{array}$$

領域グラフ



領域グラフ



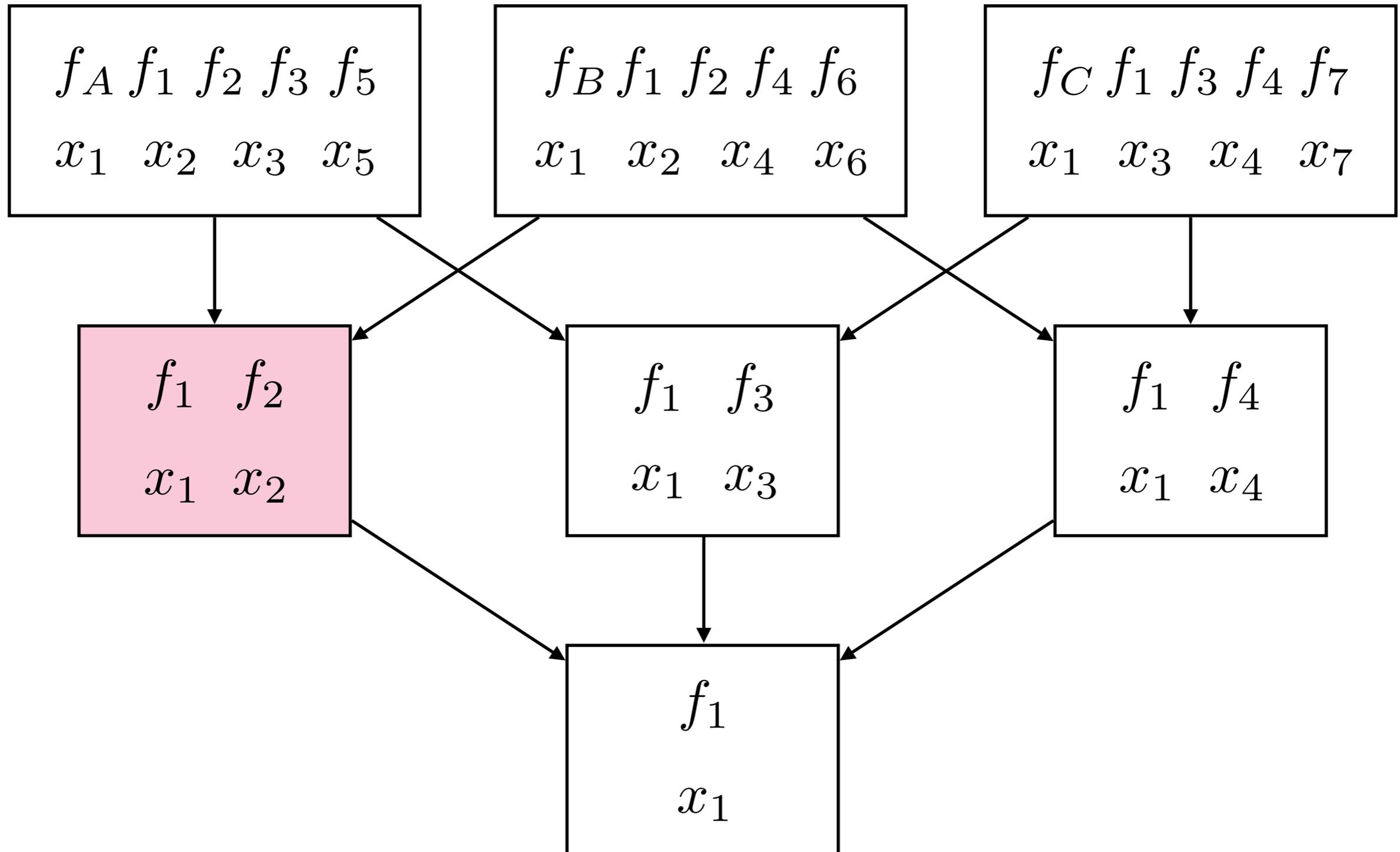
信念の定義

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{b_R(\mathbf{x}_R)}_{\text{領域}} \propto \underbrace{\prod_{a \in A_R} f_a(\mathbf{x}_a)}_{\text{領域Rに含まれる因子集合}} \left(\prod_{P \in \mathcal{P}(R)} \underbrace{m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R)}_{\text{領域Rの親領域}} \right) \\
 & \quad \cdot \left(\prod_{D \in \mathcal{D}(R)} \prod_{P' \in \mathcal{P}(D) \setminus \epsilon(R)} m_{P' \rightarrow D}(\mathbf{x}_D) \right) \\
 & \quad \quad \quad \uparrow \\
 & \quad \quad \quad \text{領域Dの親領域のうち領域Rと領域Rの子孫領域を除いたもの}
 \end{aligned}$$

領域Pから領域Rへのメッセージ

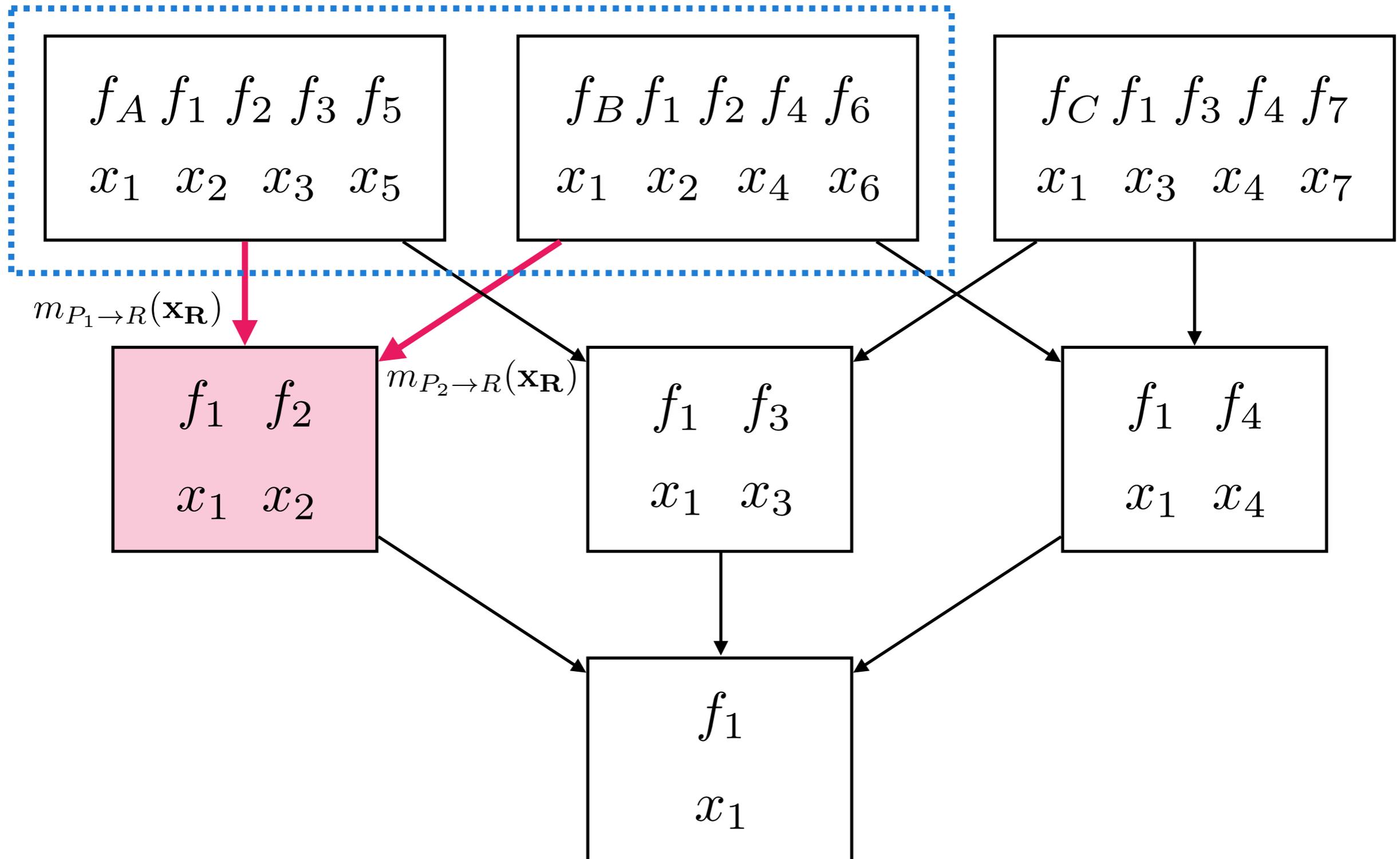
領域Rの子孫領域

信念の計算 (例)



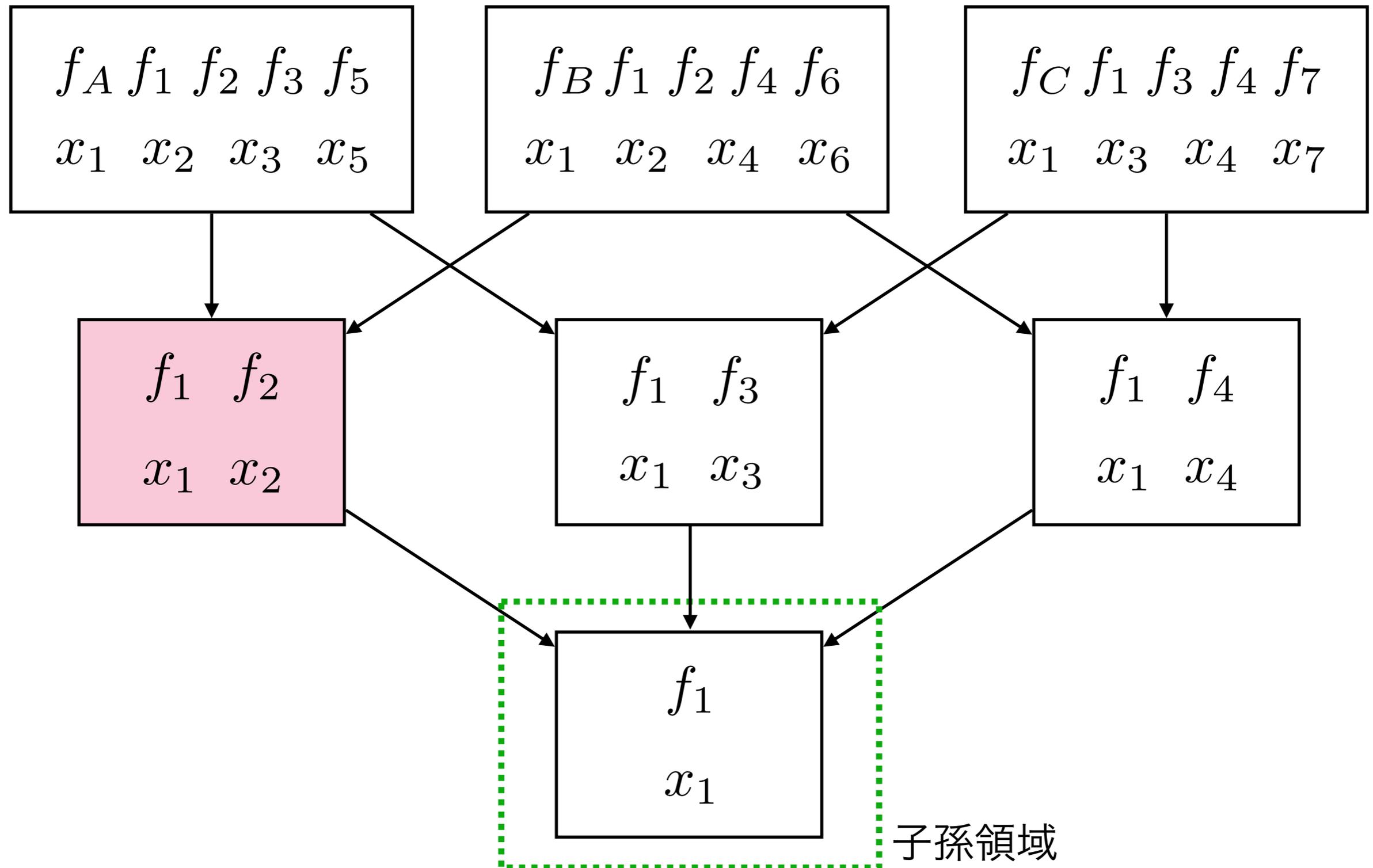
信念の計算 (例)

親領域



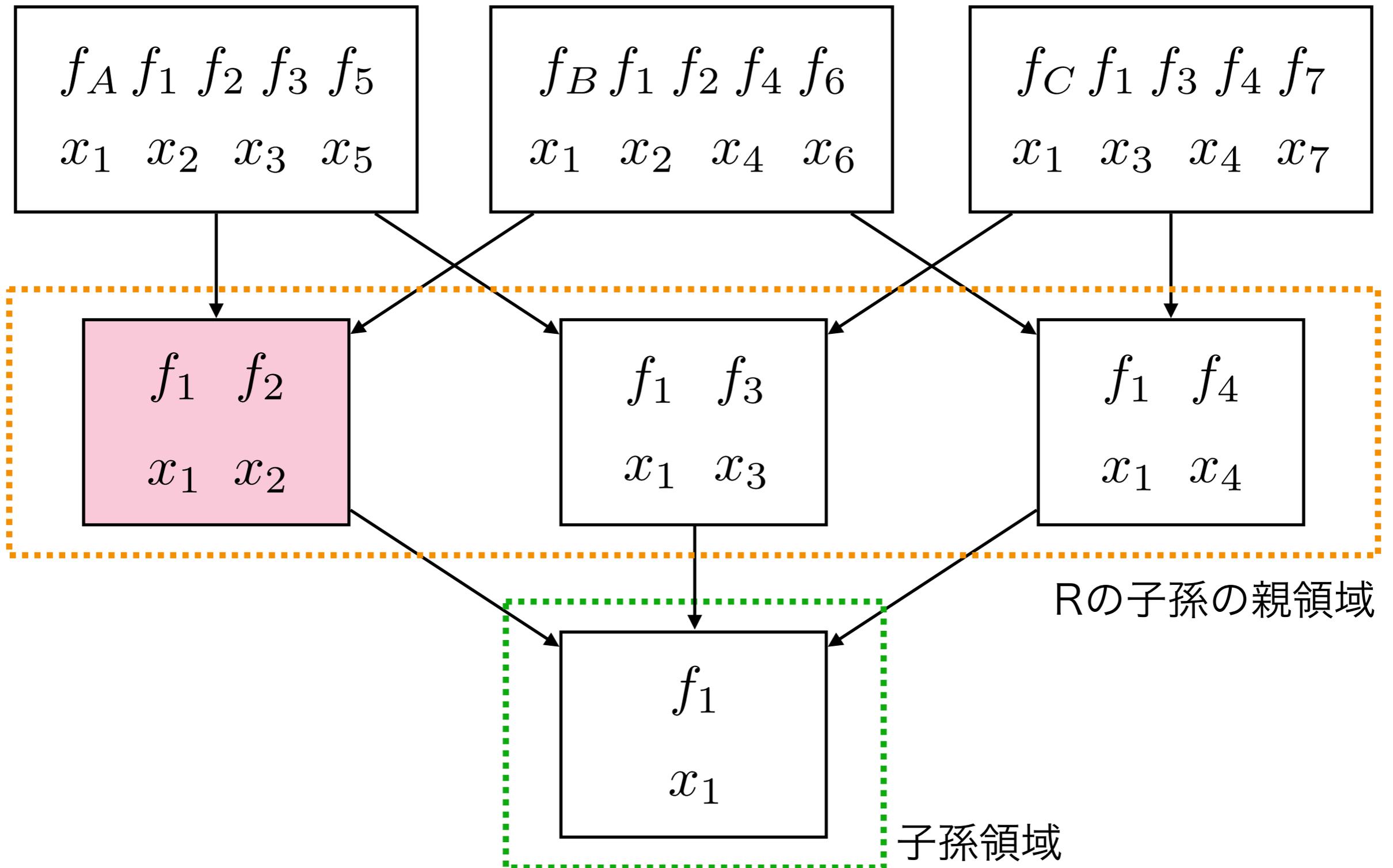
信念の計算 (例)

親領域



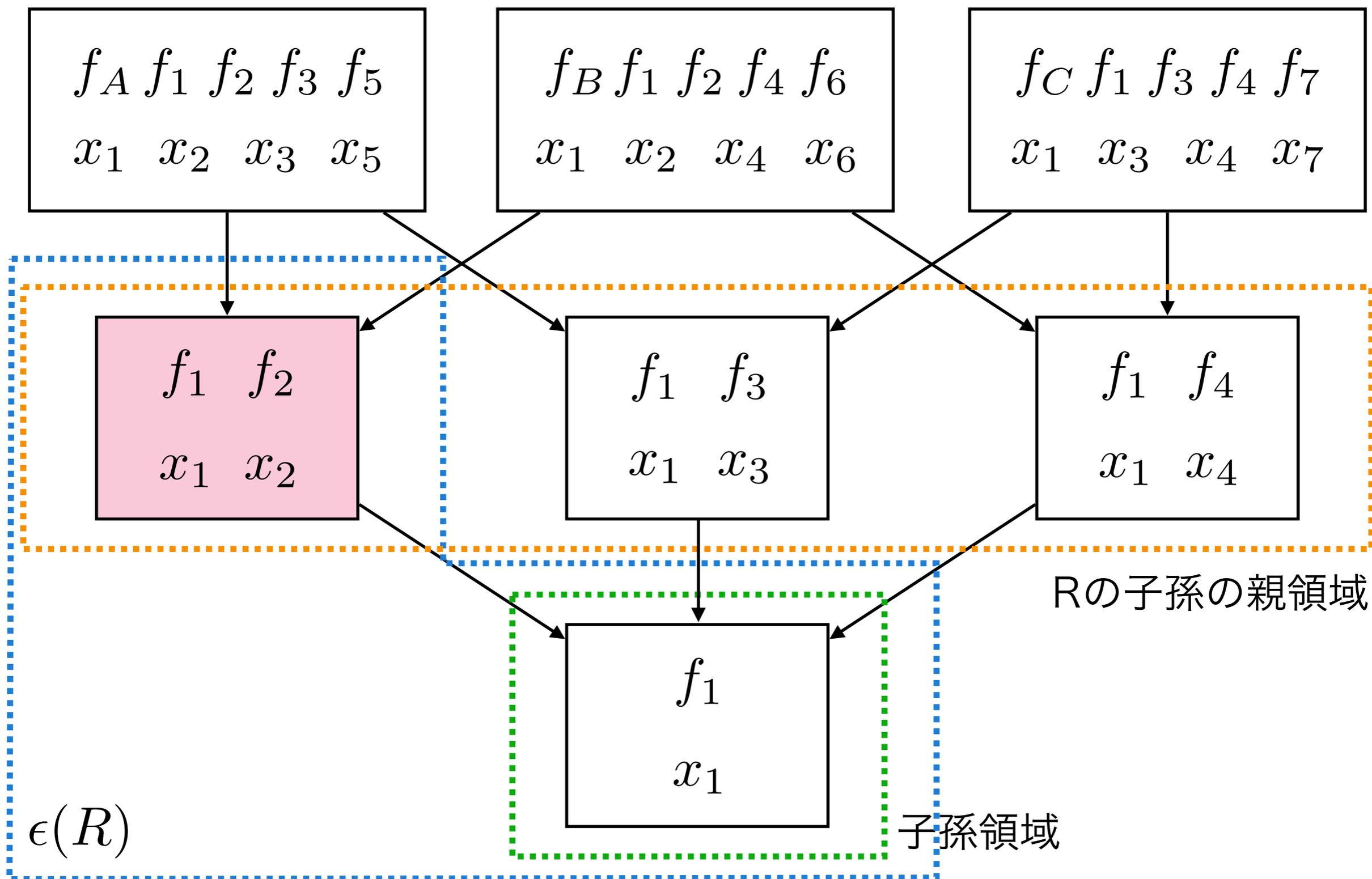
信念の計算 (例)

親領域



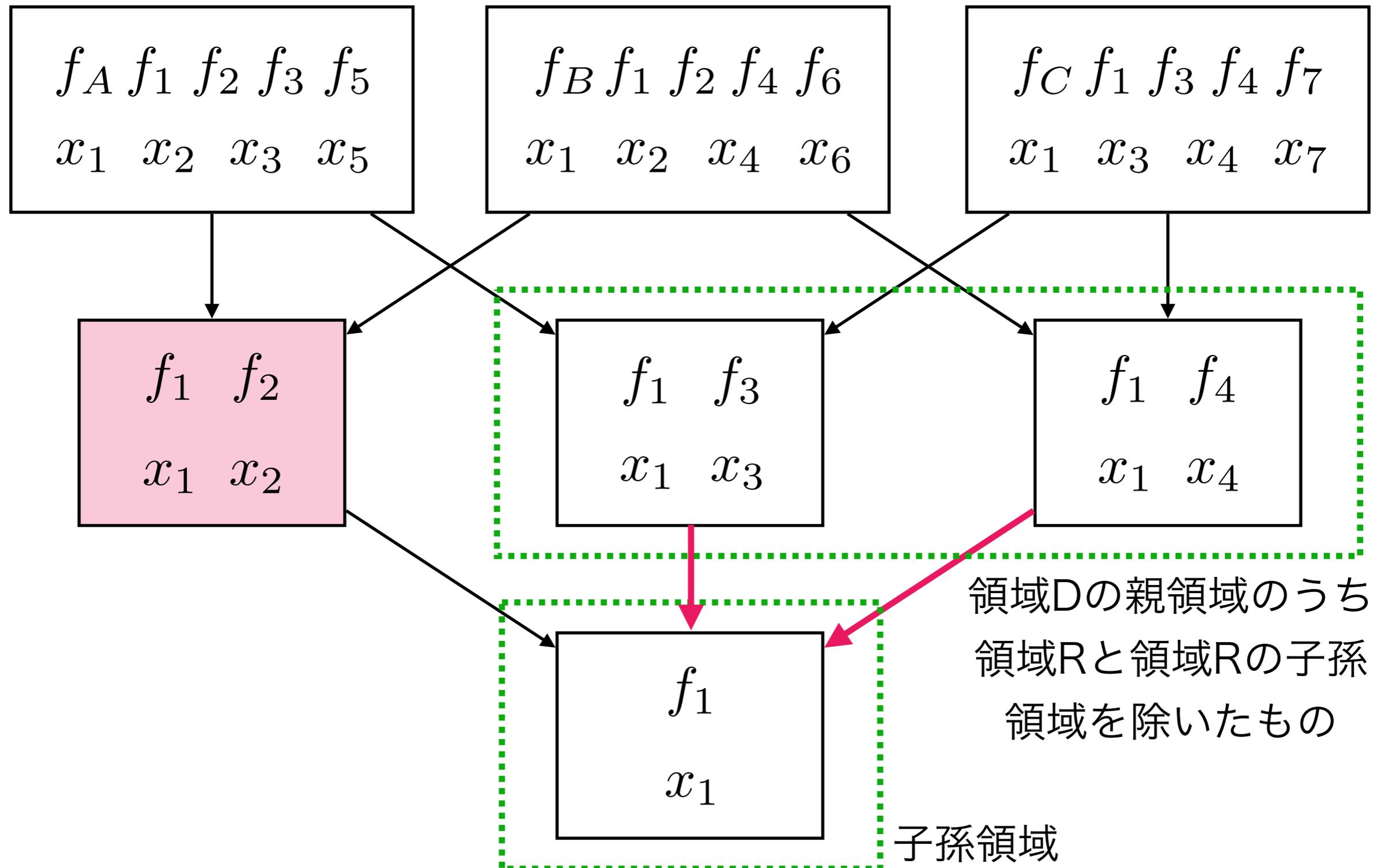
信念の計算 (例)

親領域



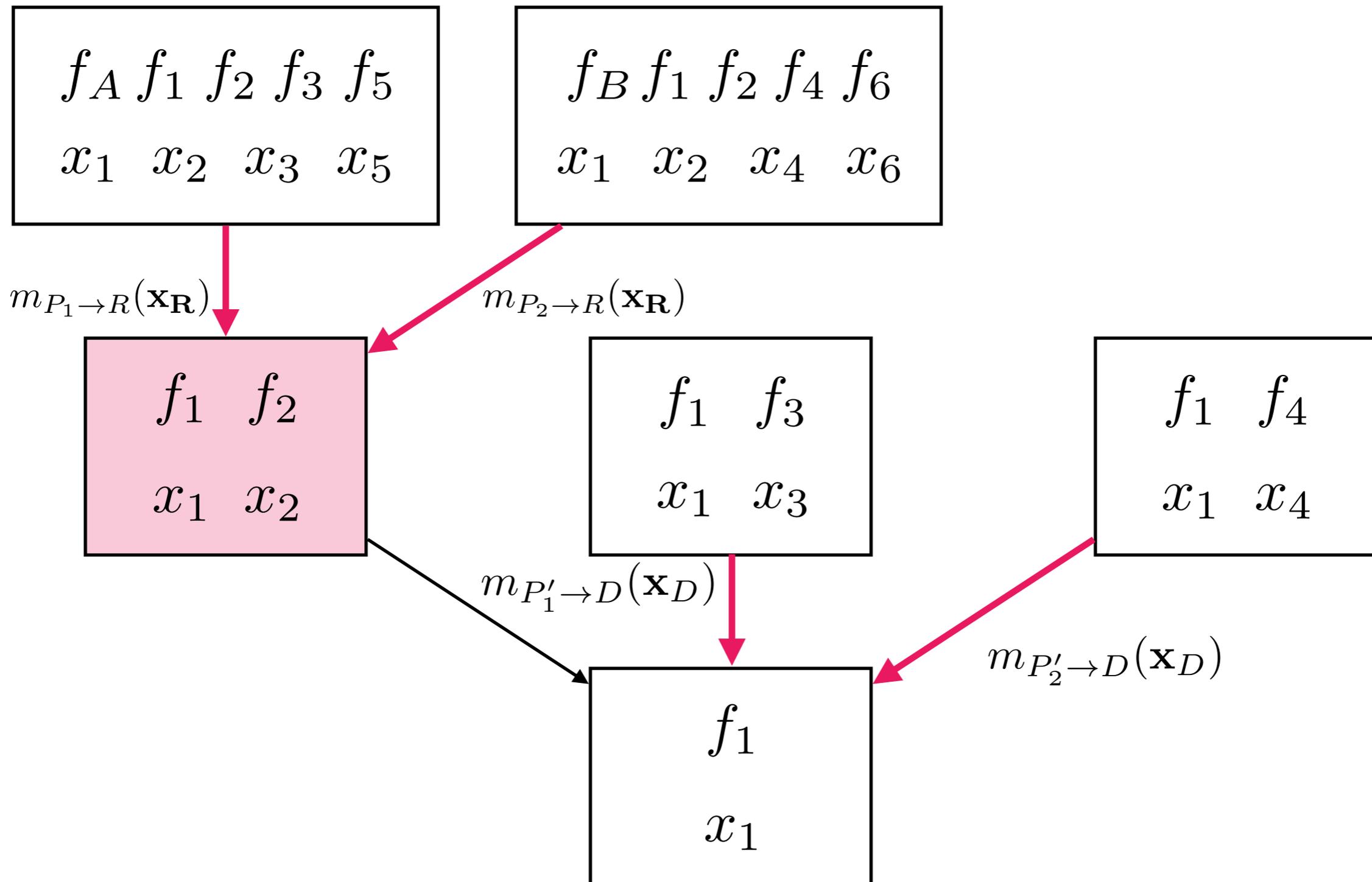
信念の計算 (例)

親領域



信念の計算 (例)

親領域



周辺化制約と更新則

- 信念は正規化することで \mathbf{x}_R に関する周辺事後分布と一致する。このため、以下の制約を満たす必要性がある。

$$b_R(\mathbf{x}_R) = \sum_{\mathbf{x}_{P \setminus R}} b_P(\mathbf{x}_P)$$

- この条件から信念同士をつなぐことで以下の更新則を得る。

$$m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R)$$

$$:= \frac{\sum_{\mathbf{x}_{P \setminus R}} \prod_{a \in A_{P \setminus R}} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{(I, J) \in N(P, R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)}{\prod_{(I, J) \in D(P, R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)}$$

PCアルゴリズム

以下の更新式によって、メッセージ更新を行い、周辺分布を求めるアルゴリズムを親から子(PC: Parent-to-Child)アルゴリズムと呼ぶ。

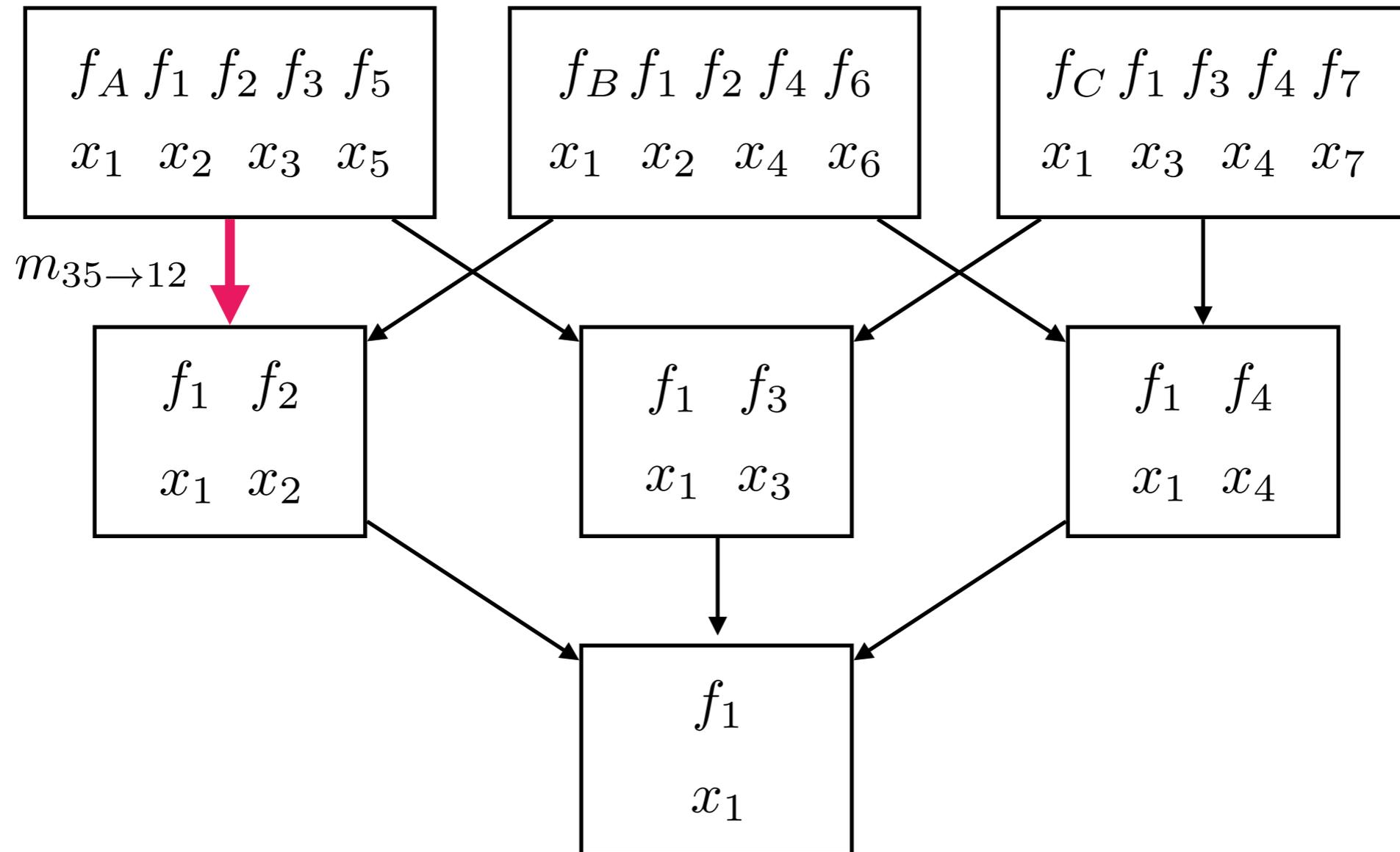
$$m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R) \prod_{(I,J) \in \underline{D(P,R)}} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J) := \sum_{\mathbf{x}_{P \setminus R}} \prod_{a \in A_{P \setminus R}} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{(I,J) \in \underline{N(P,R)}} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)$$


全ての接続された領域ペアのうち、 $D(P)$ に含まれるが、 $\epsilon(R)$ には含まれない領域 I と、 $\epsilon(R)$ に含まれる領域 J の組み合わせ

全ての接続された領域ペアのうち、 $\epsilon(P)$ に含まれない領域 I と、 $\epsilon(P)$ に含まれるが、 $\epsilon(R)$ には含まれない領域 J の組み合わせ

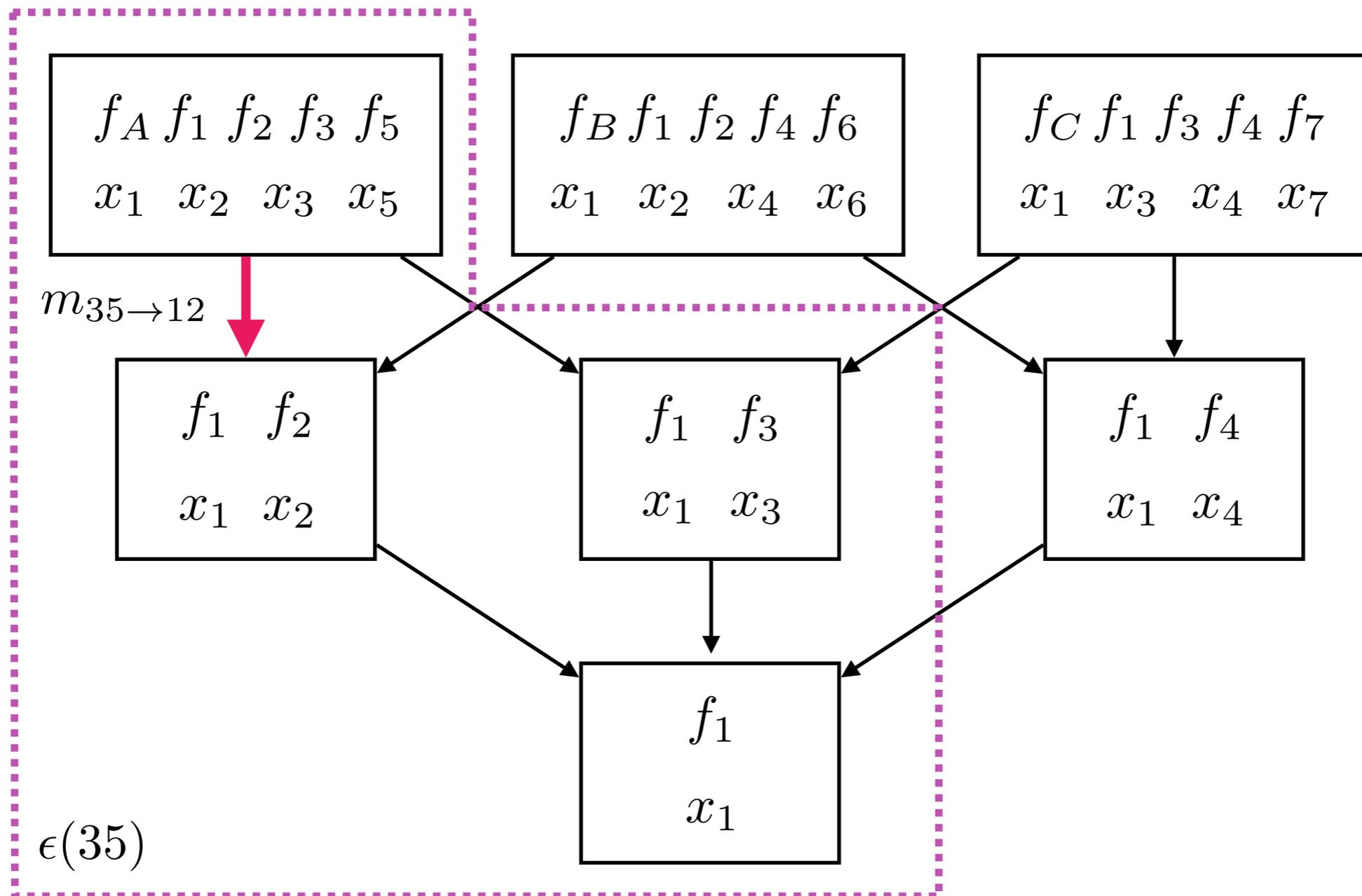
更新の例

$$\underline{m_{35 \rightarrow 12} m_{3 \rightarrow 1}} := \sum_{x_3, x_5} f_A f_3 f_5 m_{47 \rightarrow 13}$$



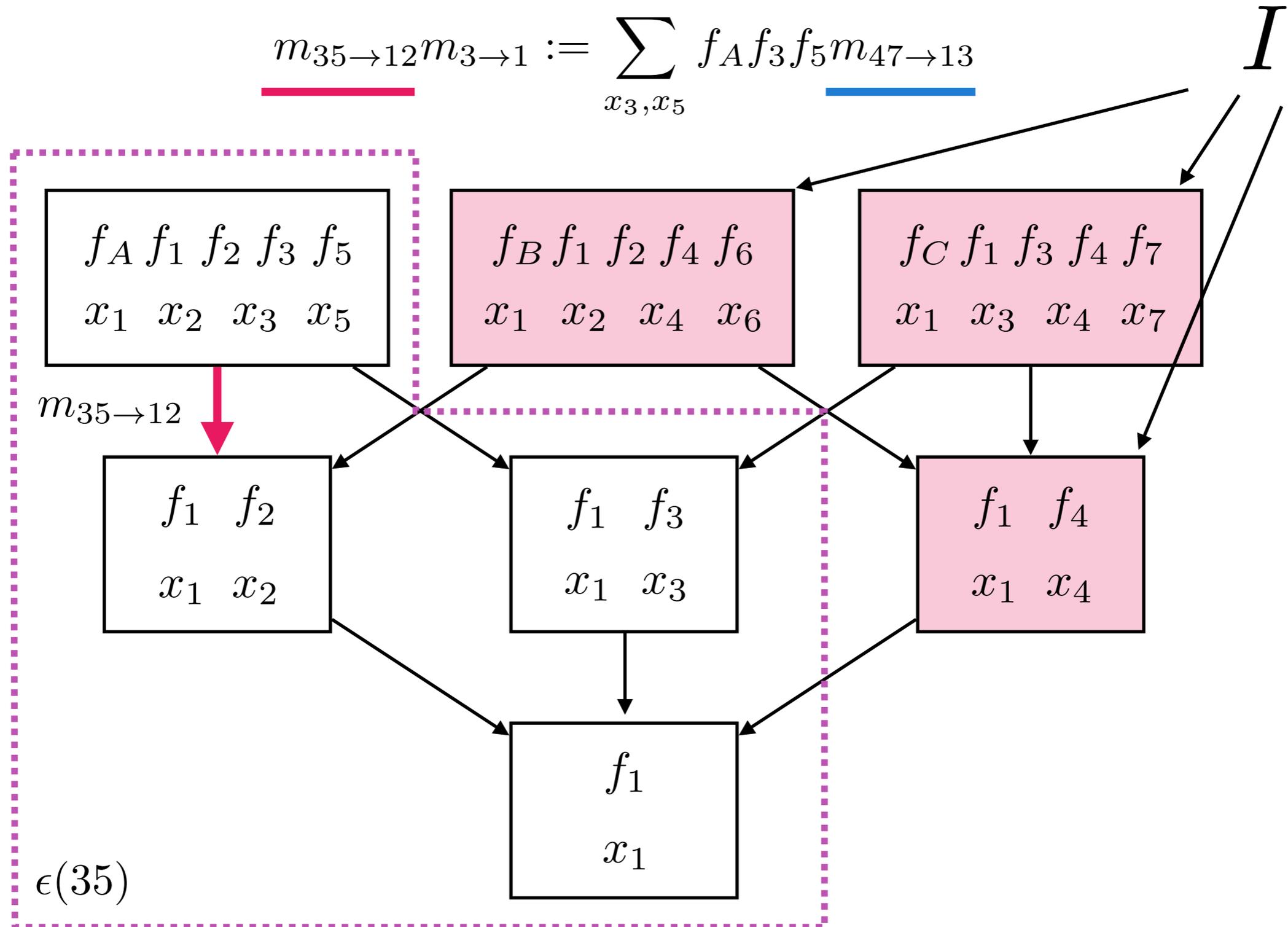
更新の例 (右辺)

$$\underline{m_{35 \rightarrow 12} m_{3 \rightarrow 1}} := \sum_{x_3, x_5} \underline{f_A f_3 f_5} m_{47 \rightarrow 13}$$



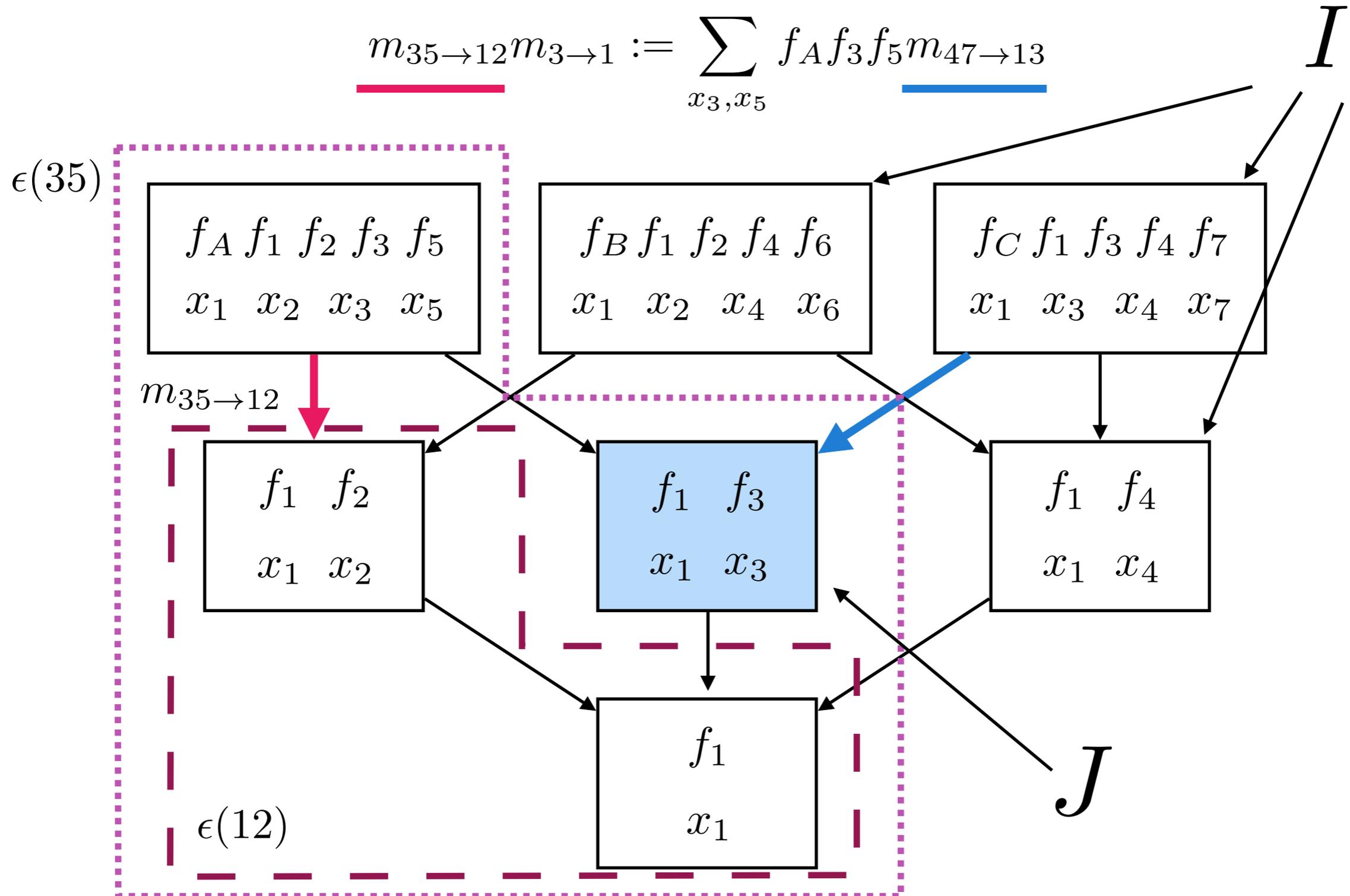
更新の例 (右辺)

$$\underline{m_{35 \rightarrow 12} m_{3 \rightarrow 1}} := \sum_{x_3, x_5} \underline{f_A f_3 f_5 m_{47 \rightarrow 13}}$$



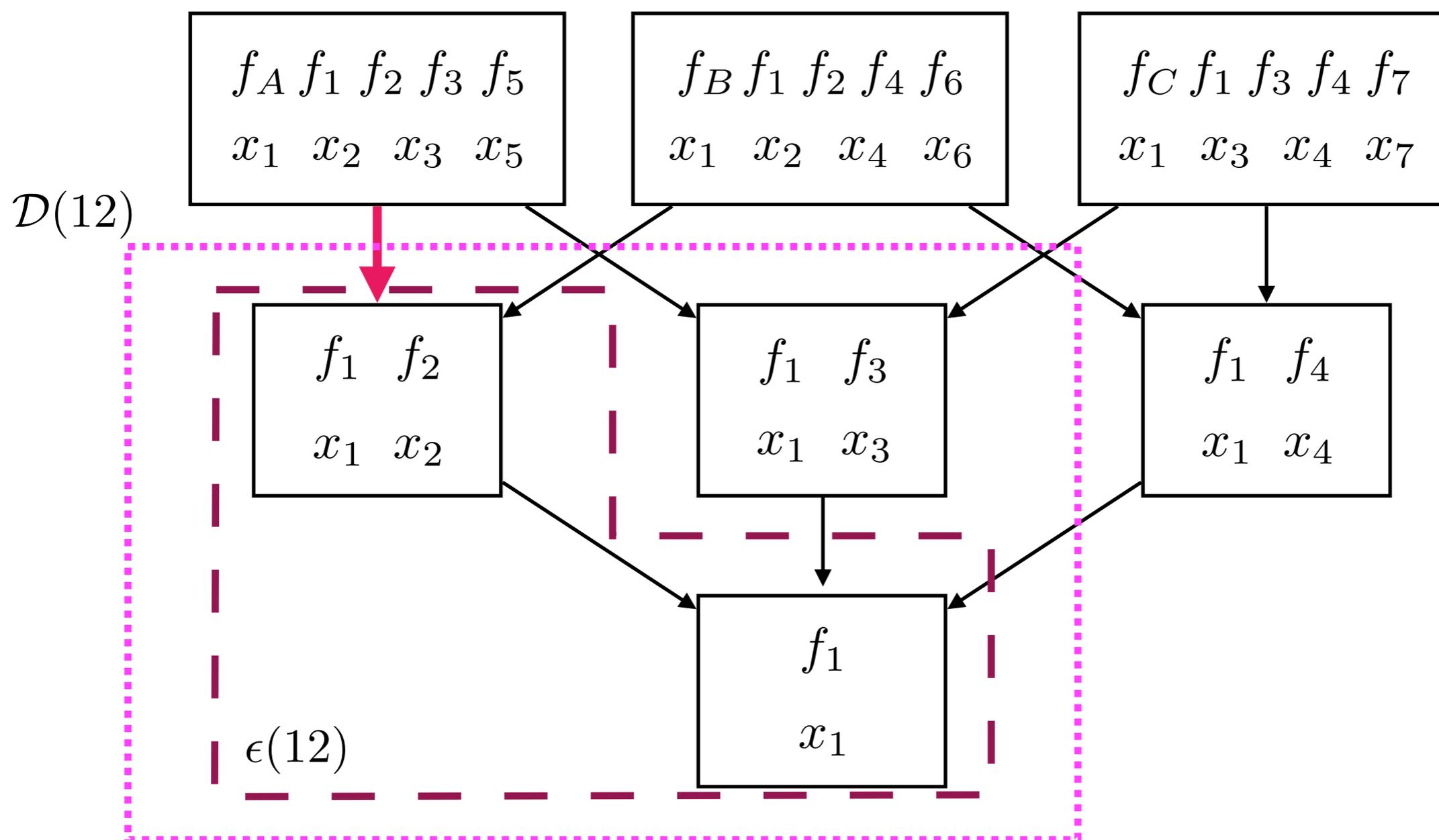
更新の例 (右辺)

$$\underline{m_{35 \rightarrow 12} m_{3 \rightarrow 1}} := \sum_{x_3, x_5} \underline{f_A f_3 f_5} m_{47 \rightarrow 13}$$



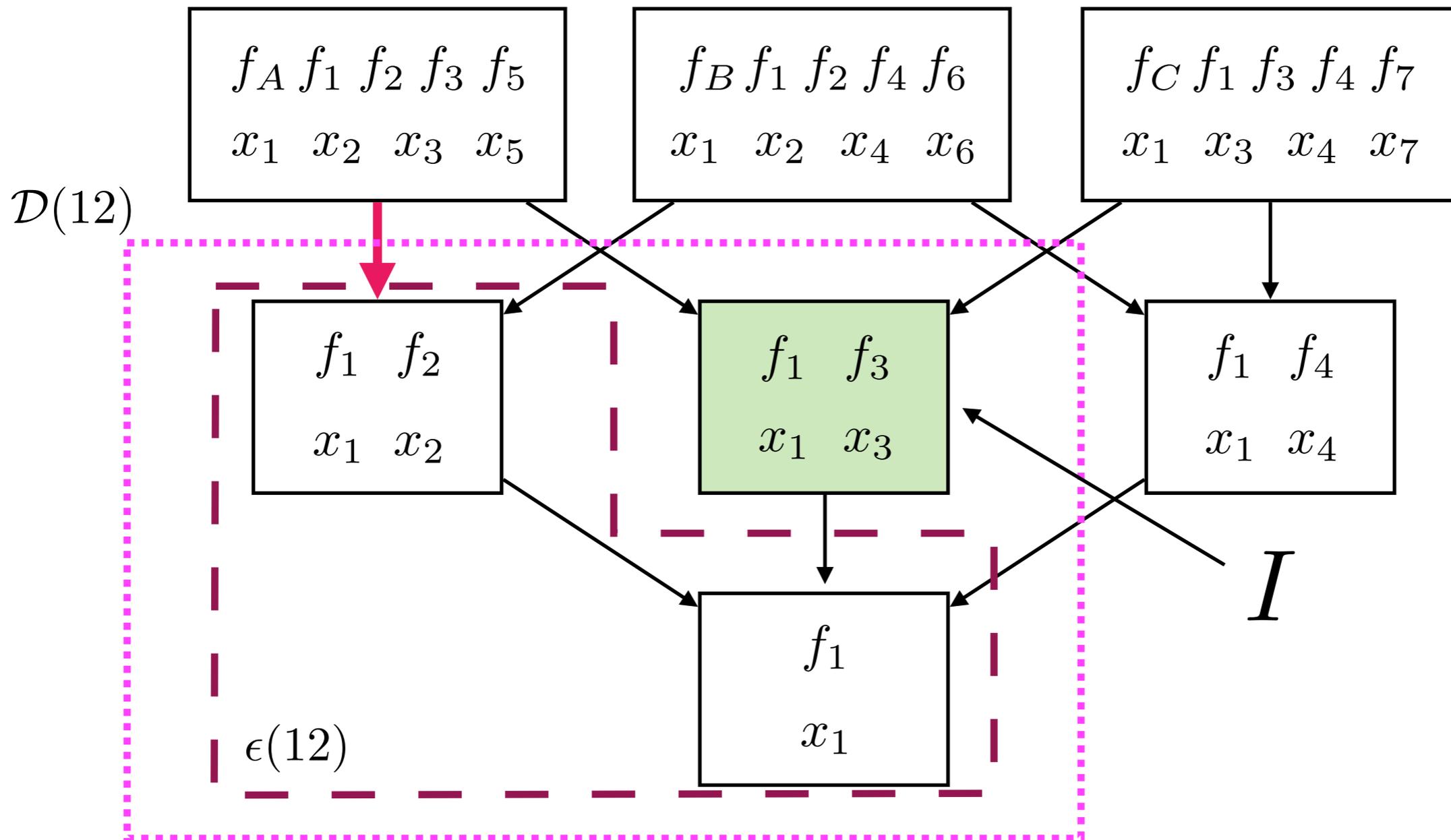
更新の例 (左辺)

$$\underline{m_{35 \rightarrow 12}} \underline{m_{3 \rightarrow 1}} := \sum_{x_3, x_5} f_A f_3 f_5 m_{47 \rightarrow 13}$$



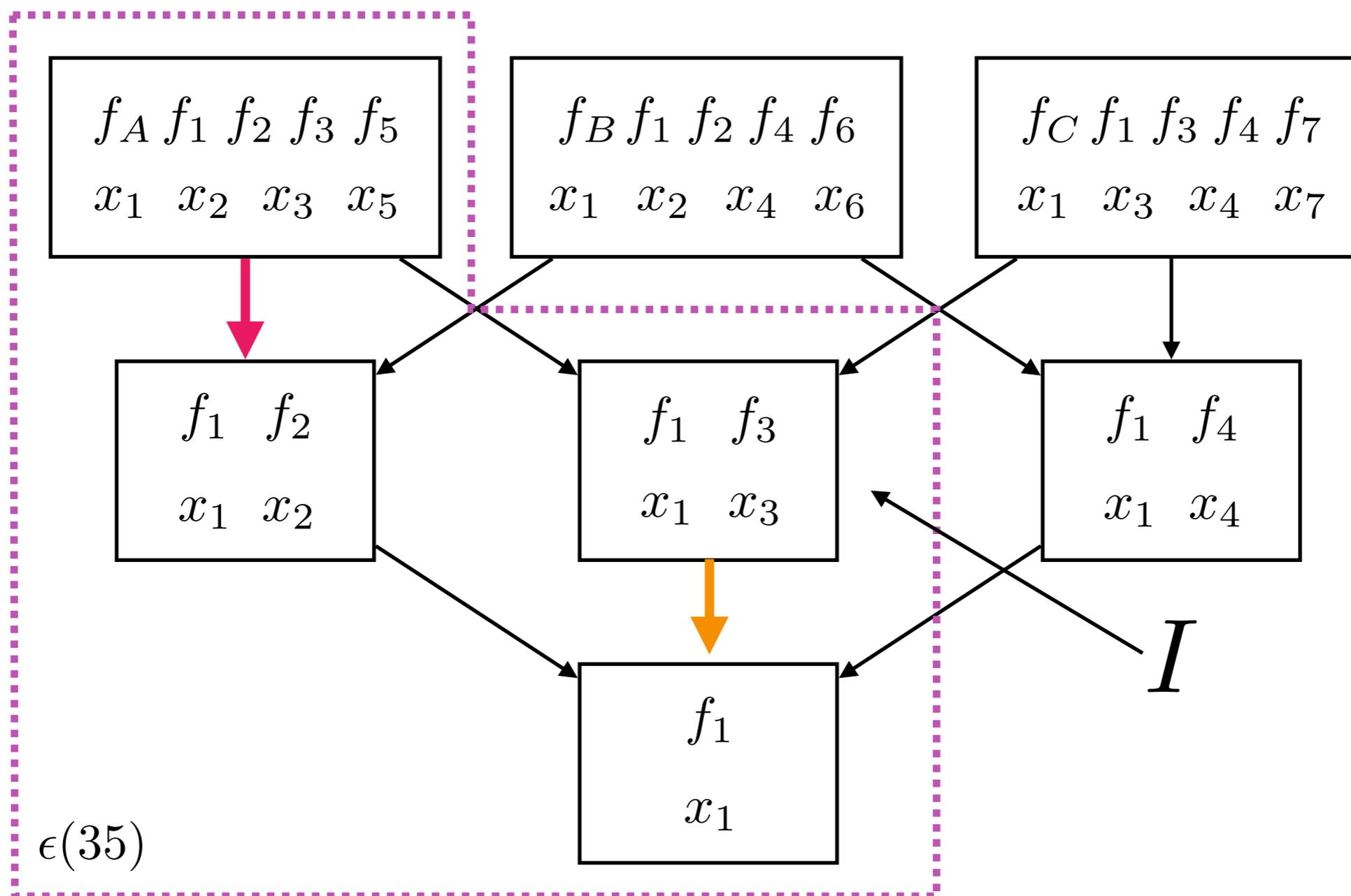
更新の例 (左辺)

$$\underline{m_{35 \rightarrow 12}} \underline{m_{3 \rightarrow 1}} := \sum_{x_3, x_5} f_A f_3 f_5 m_{47 \rightarrow 13}$$



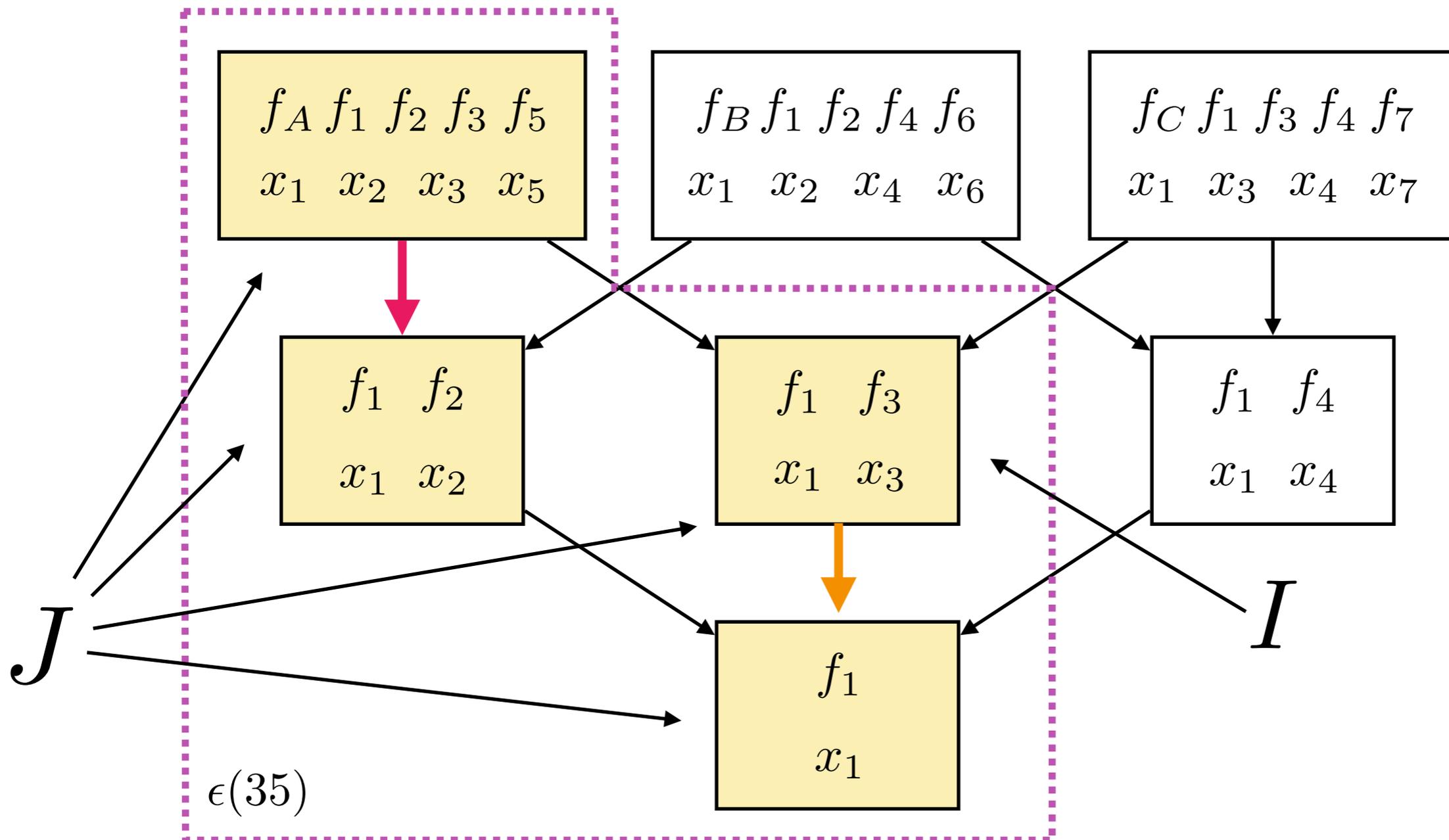
更新の例 (左辺)

$$\underline{m_{35 \rightarrow 12}} \underline{m_{3 \rightarrow 1}} := \sum_{x_3, x_5} f_A f_3 f_5 m_{47 \rightarrow 13}$$



更新の例 (左辺)

$$\underline{m_{35 \rightarrow 12}} \underline{m_{3 \rightarrow 1}} := \sum_{x_3, x_5} f_A f_3 f_5 m_{47 \rightarrow 13}$$



更新における注意点

更新対象



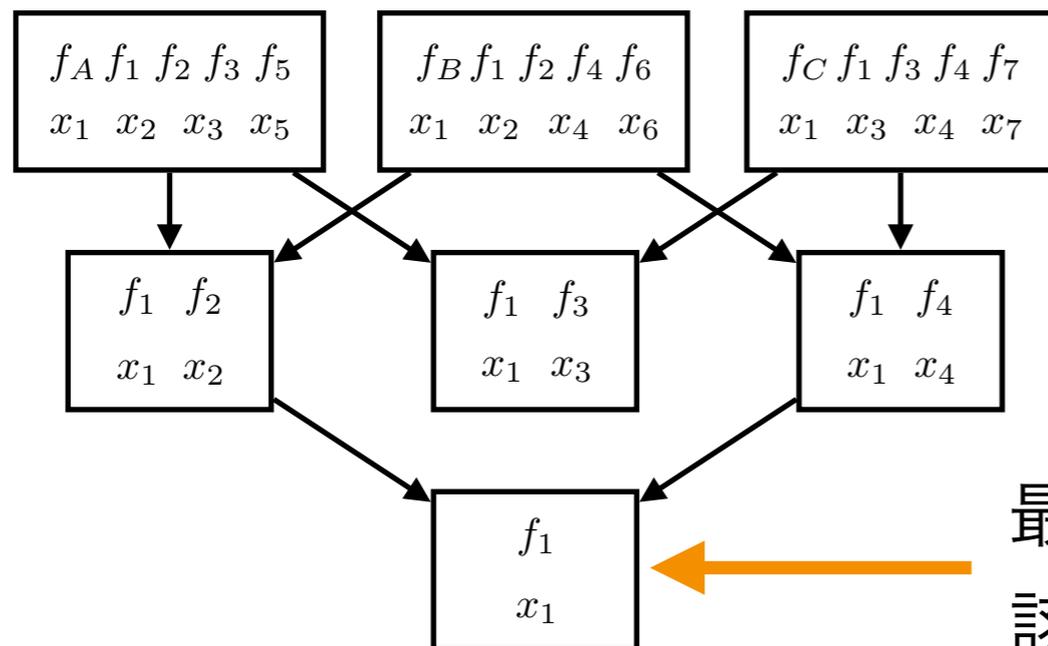
$$m_{P \rightarrow R}(\mathbf{x}_R) \prod_{(I,J) \in D(P,R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J) := \sum_{\mathbf{x}_{P \setminus R}} \prod_{a \in A_{P \setminus R}} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{(I,J) \in N(P,R)} m_{I \rightarrow J}(\mathbf{x}_J)$$



更新後の値を用いる



更新前の値を用いる



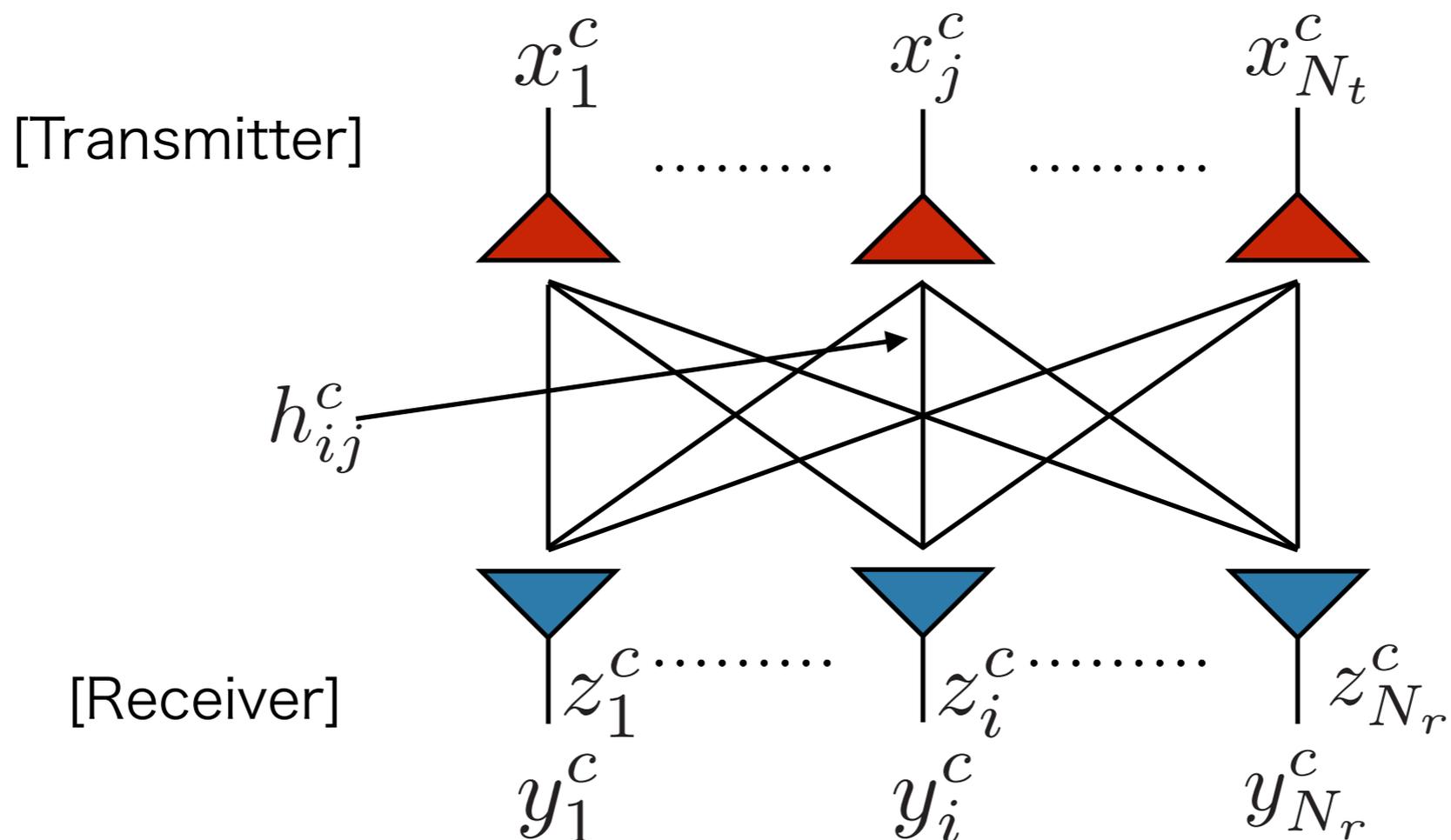
最小領域から更新を進めることに該当する

その他の注意点

- ・ 領域グラフがツリーにならない場合は、極小値がひとつに定まらないため、制振処理を用いる必要がある。
- ・ 領域グラフの構成には自由度があり、構成によって性能が大きく変わる。
- ・ 数値的に非常に不安定なアルゴリズムであり、対数領域での実装が必要不可欠。
- ・ 最大の計算量は領域グラフに含まれる最大の変数インデックスの数で決まるため、多数の因子ノードと接続を持つ変数ノードがいる問題には不向き（帯行列の構造には向いている）。

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right]$$

MIMO復調への適用例



送信信号ベクトル: $\mathbf{x}^c \in \mathbb{C}^{N_t}$

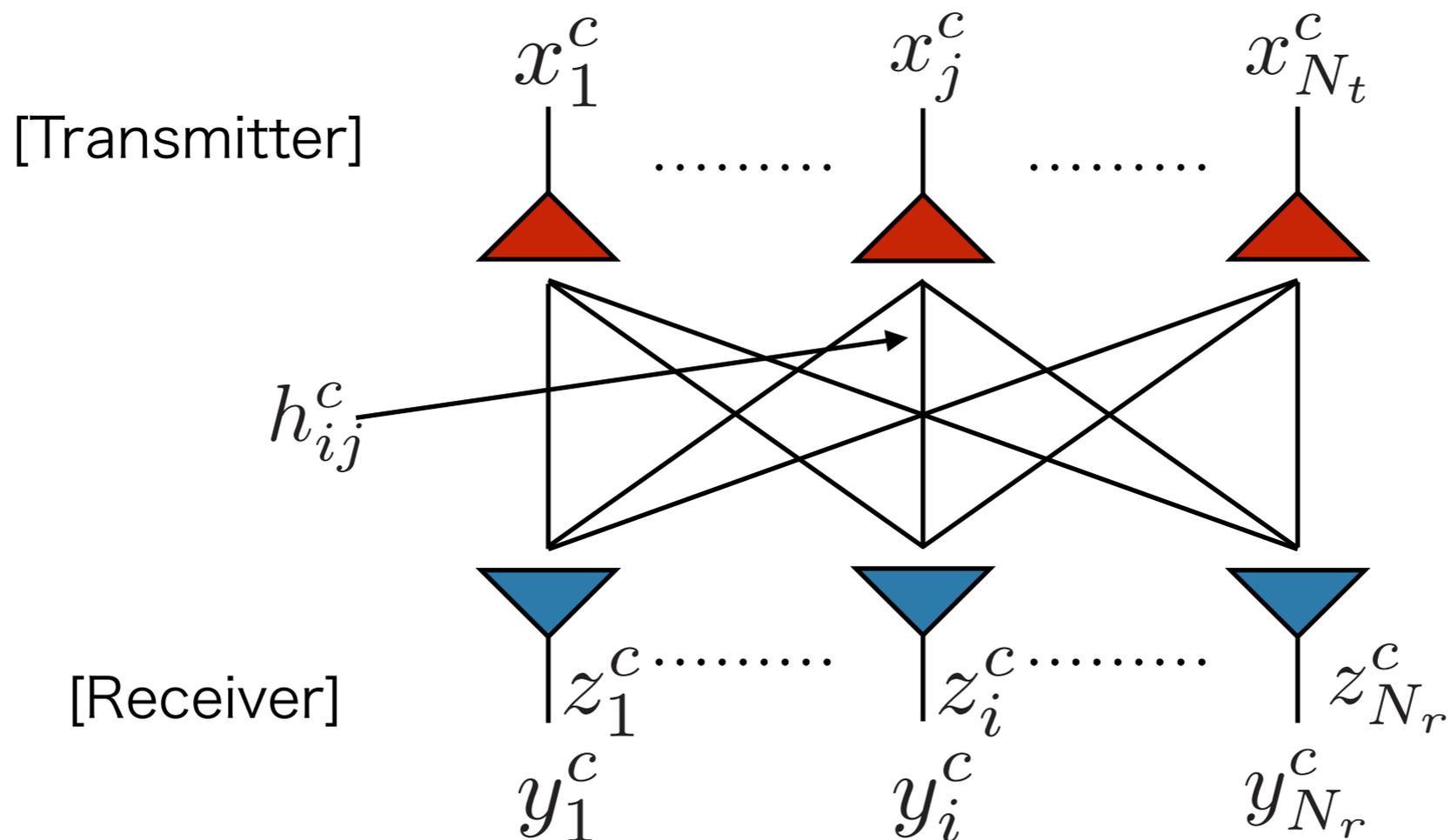
$$x_j^c = \{1 + j, 1 - j, -1 - j, -1 + j\}$$

通信路行列: $\mathbf{H}^c \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ $h_{ij}^c \sim \mathcal{CN}(0, 1)$

雑音ベクトル: $\mathbf{z}^c \in \mathbb{C}^{N_r}$ $z_i^c \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$

受信信号ベクトル: $\mathbf{y}^c \in \mathbb{C}^{N_r}$ $\mathbf{y}^c = \mathbf{H}^c \mathbf{x}^c + \mathbf{z}^c$

MIMO復調への適用例



実数MIMOシステムモデル

$$\mathbf{x} = [\Re\{\mathbf{x}^c\}^T \Im\{\mathbf{x}^c\}^T]^T$$

$$\mathbf{y} = [\Re\{\mathbf{y}^c\}^T \Im\{\mathbf{y}^c\}^T]^T$$

$$\mathbf{z} = [\Re\{\mathbf{z}^c\}^T \Im\{\mathbf{z}^c\}^T]^T$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{H}^c\} & -\Im\{\mathbf{H}^c\} \\ \Im\{\mathbf{H}^c\} & \Re\{\mathbf{H}^c\} \end{bmatrix}$$

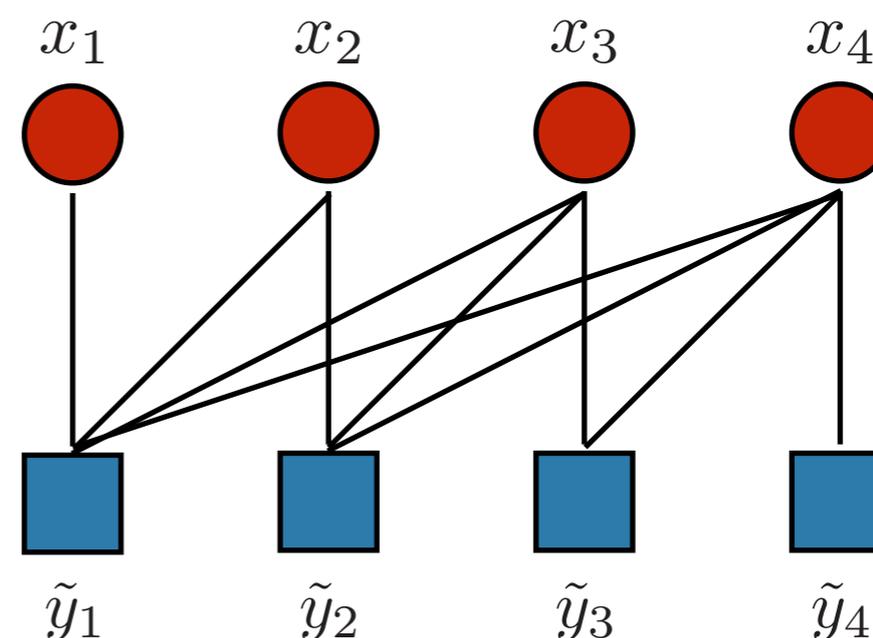
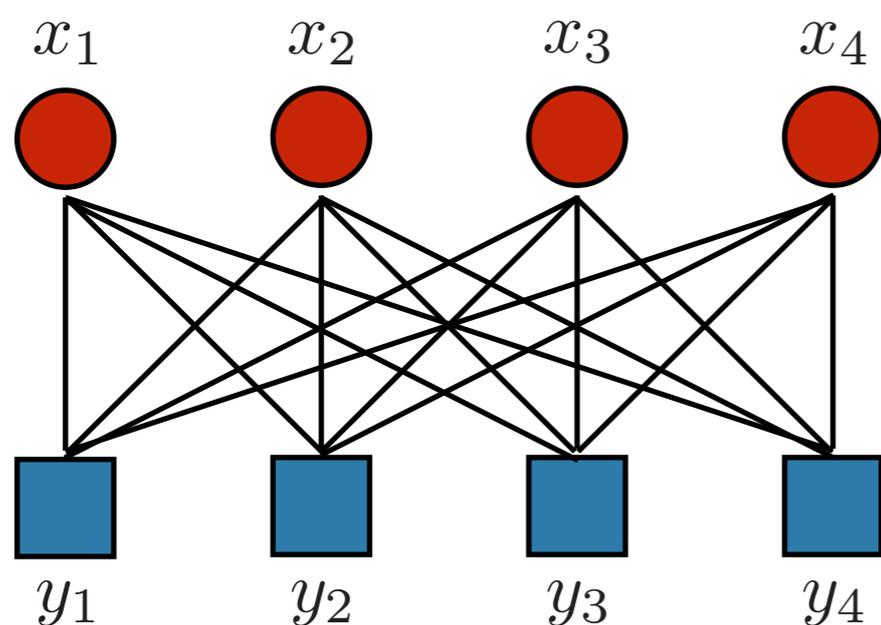
QR-GBP

全てのノード同士が互いに結合している状況から導かれる領域グラフでは、PCアルゴリズムはMLそのものになる。

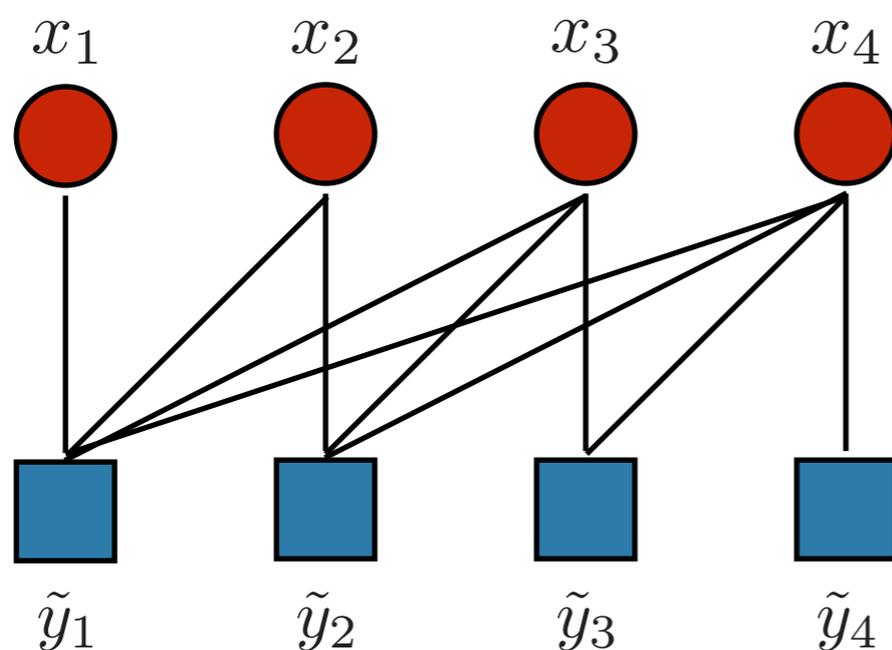
QR分解を通信路行列に適用することでグラフを変換する

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{z} \quad \mathbf{Q} : \text{ユニタリ行列}$$

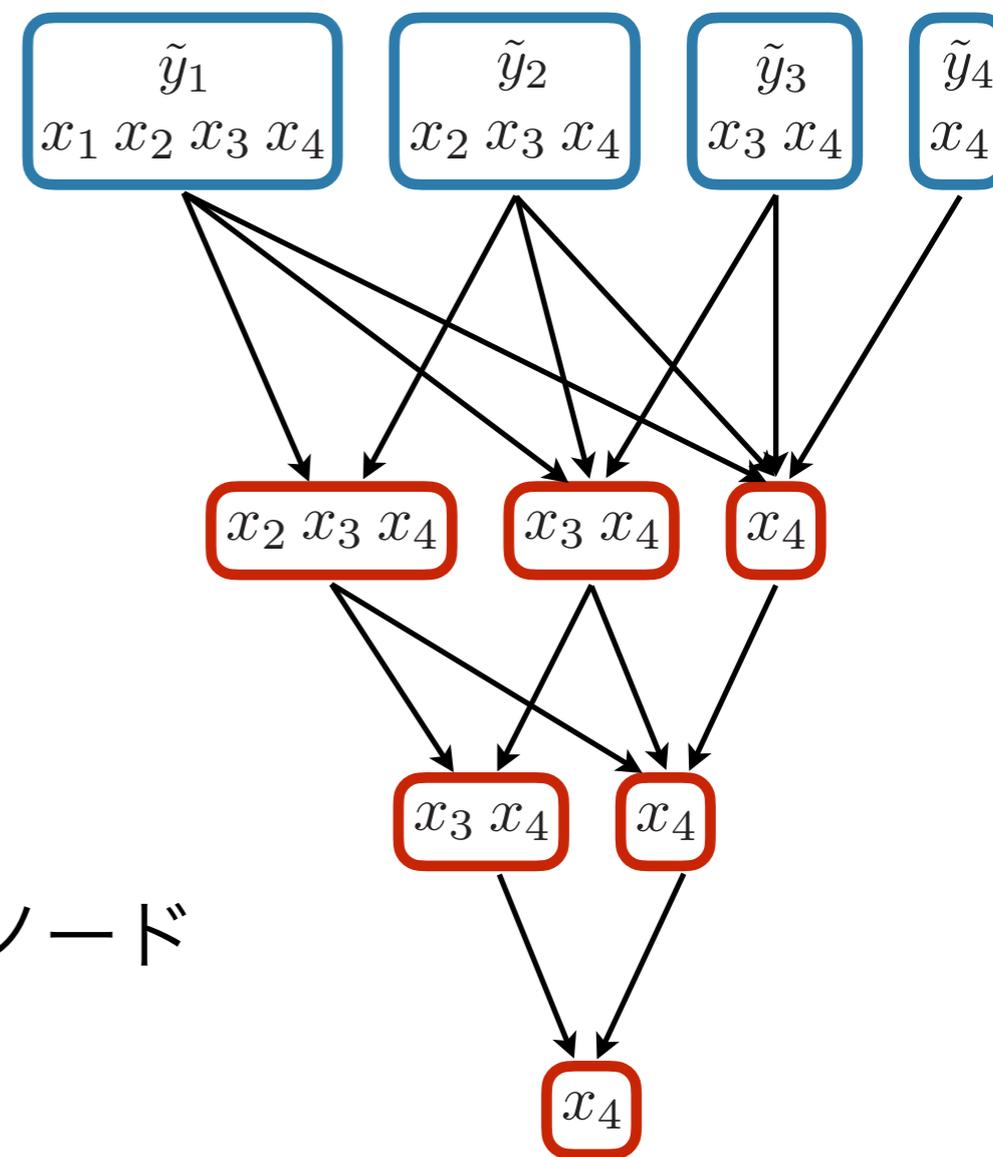
$$\mathbf{Q}^H \mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{Q}^H \mathbf{z} \quad \mathbf{R} : \text{上三角行列}$$



QR-GBPの領域グラフ



最大領域



小領域

- 最大領域

1つの観測ノードと隣接する全ての変数ノード

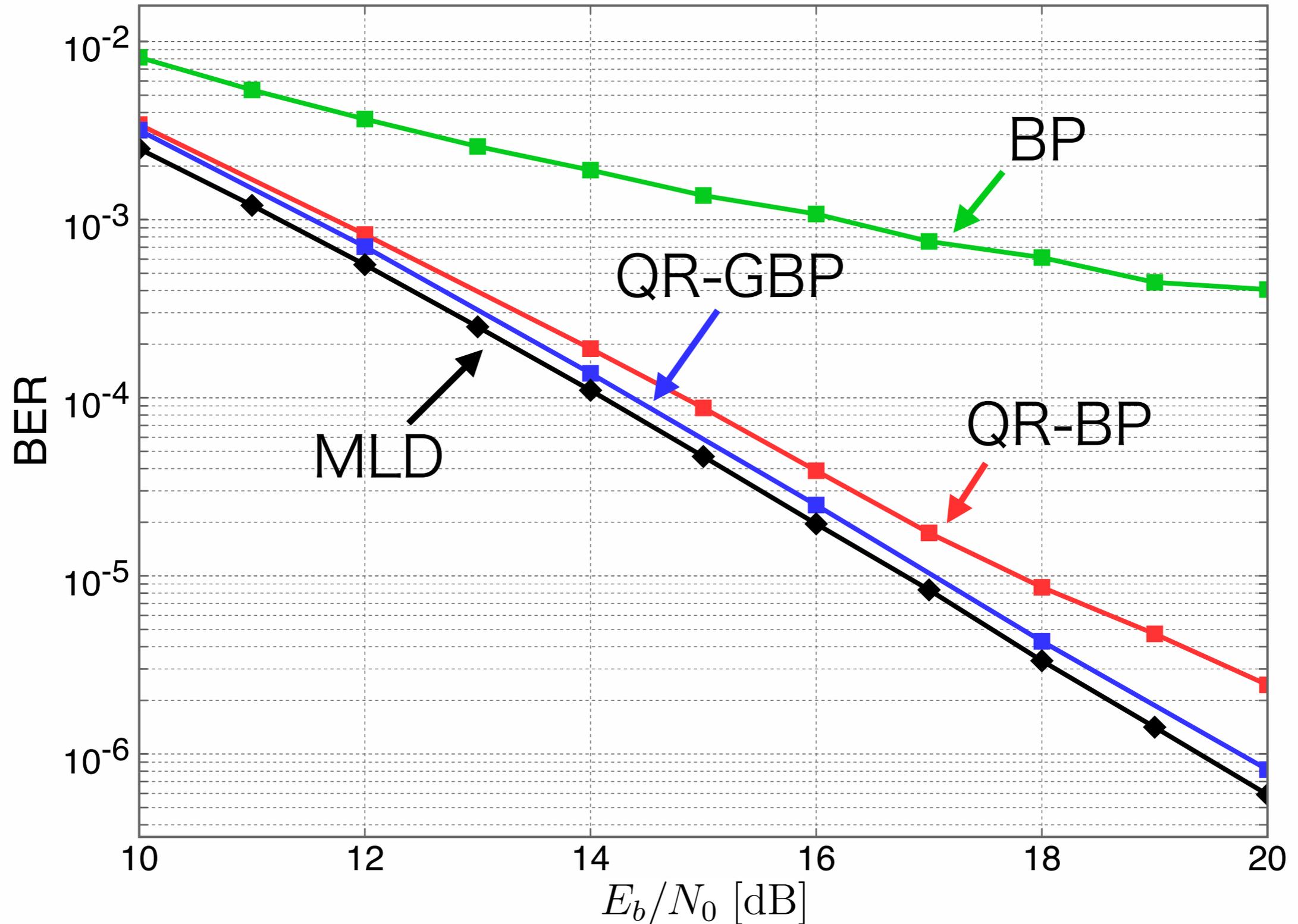
- 小領域

親リージョンに共通する変数ノード

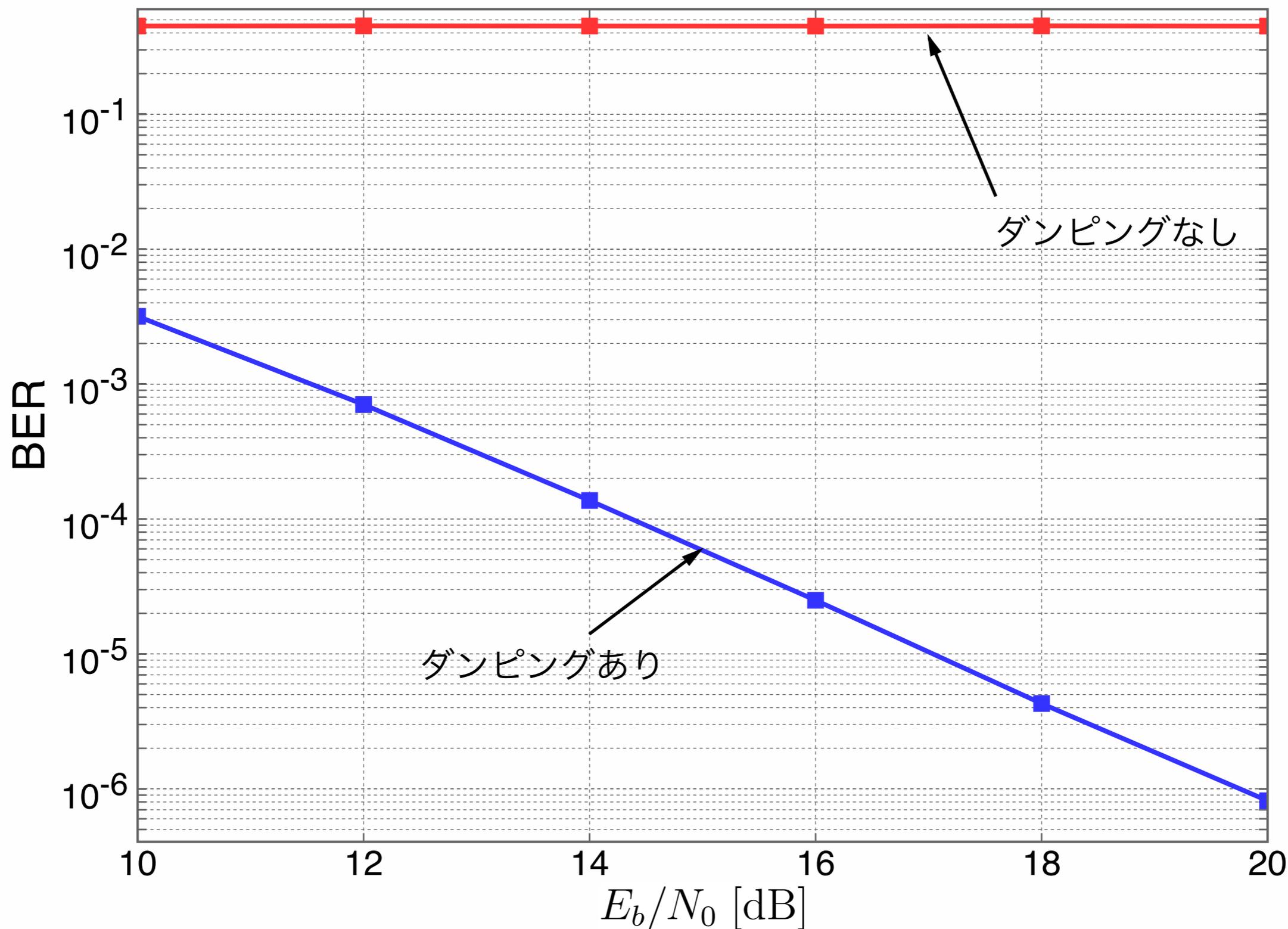
数值例 - 諸元

Detection methods	BP	QR-BP	QR-GBP	
The number of antennas	4 × 4			
Modulation	QPSK			
Noise	AWGN			
The number of iteration	10	15	9	13
Message update	Log domain			
Damping factor	0.7	0.8	0.7	0

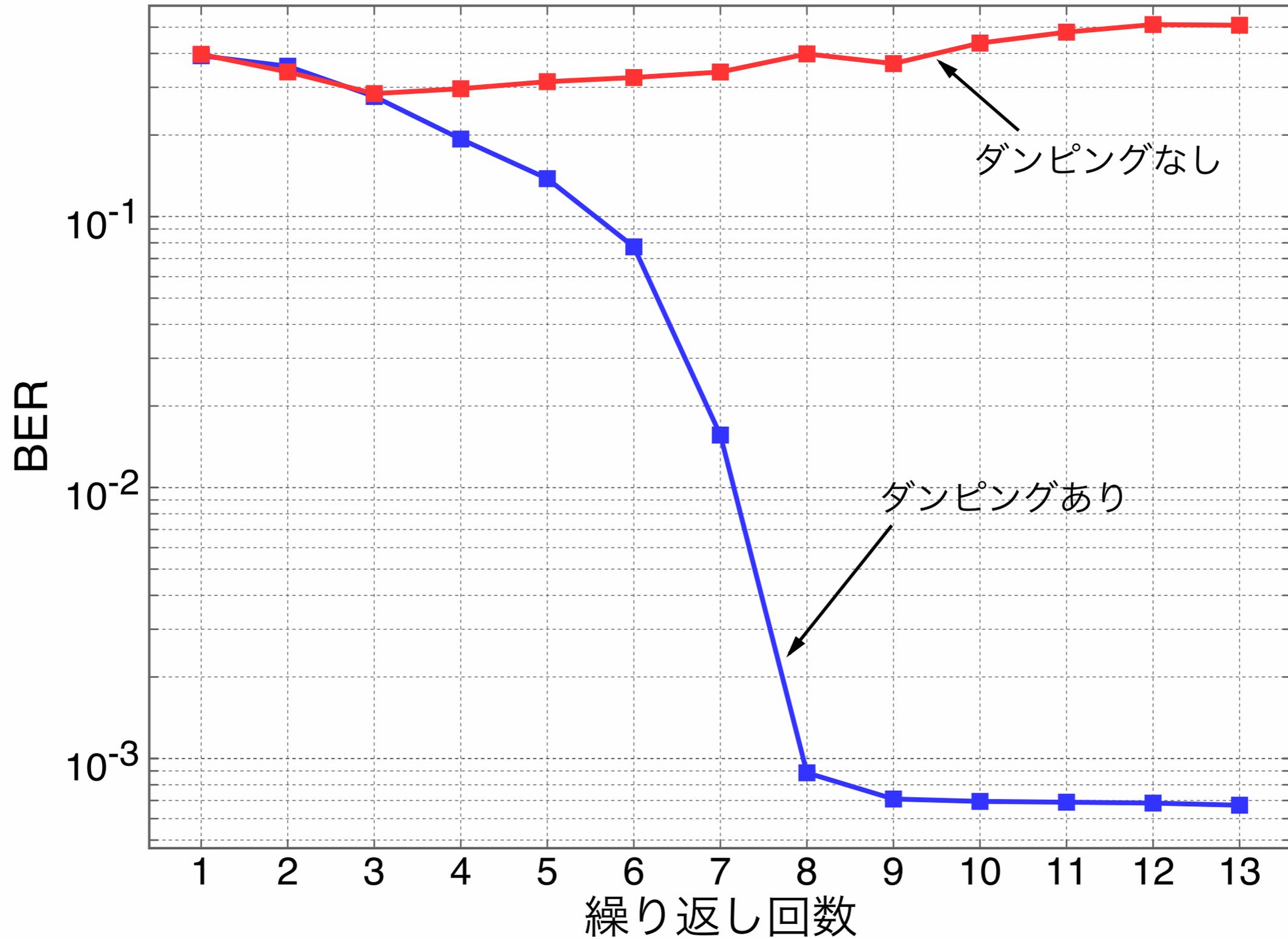
QR-GBPの復調特性



制振の有無による特性変化



収束特性



まとめ

- ・ 自由エネルギーの導入により変分問題としてBPを捉えなおし、その一般化について述べた。
- ・ 他のメッセージ伝播法も同様の形式で記述が可能であり、異なる領域を用いて導くことが可能。例えば：
 - ・ 平均場 (MF: Mean-Field) 近似
 - ・ 期待値最大化法 (EM: Expectation Maximization)
- ・ 実際の問題においてGBPを利用可能なケースは少ないと思われるが、メッセージ伝播法の仕組みや、振る舞いを理解する上では必要不可欠。
 - ・ Merging Belief Propagation and the Mean Field Approximation [Riegler et.al., IEEE IT2013]
 - ・ BP, MF, and EP for Joint Channel Estimation and Detection of MIMO-OFDM Signals [Jackbisin et.al., GLOBECOM2016]

